

# 第 32 屆 IMO 試題

First Day July 17, 1991

1. 設  $I$  是  $\triangle ABC$  的內心， $\angle A, \angle B, \angle C$  的角平分線分別交對邊於  $A', B', C'$  點，求證：

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

2. 設  $n > 6$  是一個整數， $a_1, a_2, \dots, a_k$  都是小於  $n$  的正整數並且與  $n$  互質。如果

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

求證， $n$  是質數或者是 2 的冪次方。

3. 令  $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$ ，試找出最小的整數  $n$  使得每一個  $S$  的  $n$  元子集都包含 5 個兩兩互質的數。

# 第 32 屆 IMO 試題

Second Day July 18, 1991

4. 設  $G$  是一個有  $k$  條邊的連通圖，試證明可以對這些邊編號  $1, 2, \dots, k$  使得對於每個屬於兩條或兩條以上的邊的頂點，從這個頂點出發的所有邊的標號的最大公約數是 1。

註：一個圖是由一組頂點和一些連接這些頂點的線段（稱為邊）組成。每對頂點之間最多有 1 條邊。如果對圖中的任何兩個不同的頂點  $x, y$  都有一些頂點  $x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$  使得  $v_i, v_{i+1}$  ( $0 \leq i < m$ ) 之間都有一條邊，則稱這個圖是連通的。

5.  $P$  是  $\triangle ABC$  內部中的一個點，試證明  $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$  中至少有一個不大於  $30^\circ$ 。

6. 任意給定一個實數  $a > 1$ ，試構造一個有界的無限序列  $x_0, x_1, x_2, \dots$  使得對任何  $i \neq j$  都有  $|x_i - x_j| |i - j|^a \geq 1$ 。

註：若存在一個常數  $C$  使得  $|x_i| < C$  對任何  $i$  成立，則這個無限實數序列是有界的。