第 31 屆 IMO

Beijing, China
Day I
July 12, 1990

1. 在一圓中，兩條弦 AB, CD 相交於 E 點。M 是弦 AB 上嚴格在 E、B 之間的點。過 D、E、M 的圓在 E 點的切線分別交直線 BC, AC 於 F, G。已知 $\frac{AM}{AB} = t$。求 $\frac{GE}{EF}$（用 t 表示）。

2. 設 $n \geq 3$，考慮在同一圓周上的 $2n-1$ 個互不相同的點所成的集合 E。將 E 中一部分點染成黑色，其餘的點不染顏色。如果至少有一對黑點，以它們為端點的兩條弧中有一條的內部（不包含端點）恰含 E 中 n 個點，則稱這種染色方式為好的，如果將 E 中 K 個點染黑的每一種染色方式都是好的，求 K 的最小值。

3. 求出(並予以證明)所有大於1的整數 n，使 $\frac{2^n + 1}{n^2}$ 為整數。

第 31 屆 IMO

Beijing, China
Day II
July 13, 1990

4. Q^+ 是全體正有理數所成的集合。試作一個函數 $f:Q^+\to Q^+$ ，使得對任意的 x、$y\in Q^+$ ，均有 $f(xf(y))=\dfrac{f(x)}{y}$ 。

5. 給定一個初始整數 $n_0>1$ 後，兩名選手 A 、 B 按以下規則輪流取整數 $n_1,n_2,n_3,\cdots\cdots$：

   在已知 n_{2k} 時，選手 A 可以取任一整數 n_{2k+1} ，使得 $n_{2k}\le n_{2k+1}\le n_{2k}^2$ ；

   在已知 n_{2k+1} 時，選手 B 可以取任一整數 n_{2k+2} ，使得 $\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ 是一個質數的正整數冪。

   若 A 取到 1990，則 A 勝。若 B 取到 1，則 B 勝。

   對怎樣的初始值 n_0 ，(1) A 有必勝策略；(2) B 有必勝策略；(3)雙方均無必勝策略？

6. 證明存在一個凸 1990 邊形，同時具有下面的性質(i)與(ii)：

   (i)所有的內角均相等。

   (ii)1990 條邊的長度是 $1^2,2^2,\cdots,1989^2,1990^2$ 的一個排列。