第 30 屆 IMO 試題

Braunschweig, Germany
Day I

1.求證：集合$\{1,2,\cdots,1989\}$可以分為117個互不相交的子集$A_i\,(i=1,2,\cdots,117)$，使得

(1)每個A_i含有17個元素；

(2)每個A_i中各元素之和相同。

2.銳角三角形ABC中，A角的平分線交三角形的外接圓於另一點A_1。點B_1,C_1，與此類似，直線AA_1與B、C兩角的外角平分線相交於A_0。點B_0,C_0與此類似。求證：

(1)三角形$A_0B_0C_0$的面積是六邊形$AC_1BA_1CB_1$面積的二倍；

(2)三角形$A_0B_0C_0$的面積至少是三角形ABC面積的四倍。

3.設n和k是正整數，S是平面上n個點的集合，滿足：

(1)S中任何三點不共線；

(2)對S中的每一個點P，S中至少存在k個點與P距離相等。

求證：$k<\dfrac{1}{2}+\sqrt{2n}$。

第 30 屆 IMO 試題

Braunschweig, Germany
Day II

4.設 $ABCD$ 是一凸四邊形，其三邊 AB, BC, AD 滿足 $AB = AD + BC$。形內有一點 P，它距 CD 為 h，且使 $AP=h+AD$，$BP=h+BC$。求證：

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

5.求證：對任何正整數 n，存在 n 個相繼的正整數，它們都不是質數的整數冪。

6.設 n 為正整數。我們說集合 $\{1, 2, \cdots\cdots, 2n\}$ 的一個排列 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{2n})$ 具有性質 P，如果在 $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ 當中至少有一個 i 使 $|x_i - x_{i+1}| = n$ 成立。

求證：對於任何 n，具有性質 P 的排列比不具有性質 P 的排列個數多。