

第 29 屆 IMO

Canberra, Australia
Day I

1. 考慮在同一平面上半徑為 R 與 r ($R > r$) 的兩個同心圓。設 P 是圓周上的一個定點， B 是大圓周上的一個動點，直線 BP 與大圓周相交於另一點 C 。過點 P 且與 BP 垂直的直線 l 與小圓周相交於另一點 A (如果 l 與小圓相切於 P ，則 $A = P$)。

(i) 求表達式 $BC^2 + CA^2 + AB^2$ 所取值的集合；

(ii) 求線段 AB 的中點的軌跡。

2. 設 n 為正整數，且 $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ 是某個集合 B 的子集。已知：

(a) 每一 A_i 恰含有 $2n$ 個元素；

(b) $A_i \cap A_j$ ($1 \leq i < j \leq 2n+1$) 恰有一個公共元素；

(c) B 中每個元素屬於至少兩個 A_i ，問：對怎樣的值 n ，可以將 B 中的每一元素貼一張寫有“0”或“1”的標籤，使得每個 A_i 中恰含有 n 個貼上寫有“0”的標籤的元素？

3. 函數 f 定義在正整數集上： $f(1) = 1; f(3) = 3$; 且對每個正整數 n 有

$$f(2n) = f(n), f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

試確定小於或等於 1988 並滿足 $f(n) = n$ 的正整數 n 的個數。

第 29 屆 IMO

Canberra, Australia

Day II

4. 證明：滿足不等式 $\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$ 的實數 x 的集合是互不相交的區間的聯集，並且

這些區間長度的總和等於 1988。

5. 在直角三角形 ABC 中， AD 是斜邊 BC 上的高。連接 $\triangle ABD$ 的內心與 $\triangle ACD$ 的內心的直線，分別與邊 AB 及 AC 交於 K 及 L 兩點。 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AKL$ 的面積分別記為 S 與 T ，求證： $S \geq 2T$ 。

6. 正整數 a 與 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2 。求證： $\frac{(a^2+b^2)}{(ab+1)}$ 是某個正整數的平方。