第 28 屆 IMO

Havana, Cuba
Day I
July 10, 1987

1. 令 $p_n(k)$ 是集合 $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n\}$ 的保持 k 個點不動的排列的數目，求證：

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!.$$

2.銳角三角形 ABC 的頂點 A 的內分角線交 BC 於 L，又交三角形的外接圓於 N，過 L 分別作 AB 和 AC 邊的垂線 KL 和 LM，垂足是 K 和 M，求證四邊形 $AKNM$ 的面積等於三角形 ABC 的面積。

3.設 n 個實數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 滿足 $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots + x_n^{\ 2} = 1$。求證：對任意整數 $k \ge 2$。存在 n 個不全為零的整數，a_i，$|a_i| \le k-1$。$i = 1, 2, \cdots, n$，使得

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

第 28 屆 IMO

Havana, Cuba
Day II
July 11, 1987

4. 求證：不存在這樣一個函數 $f: N_0 \to N_0, N_0 = \{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，使得對於任何 $n \in N_0, f[f(n)] = n + 1987$。

5. 證明：對於任何自然數 $n \geq 3$，在歐氏平面上存在一個 n 個點的集合，使得每一對點之間距離是無理數，並且每三個點構成一個非退化三角形具有有理面積。

6. 已知 $n \geq 2$，求證：如果 $k^2 + k + n$ 對於整數 $k,\ 0 \leq k \leq \sqrt{\dfrac{n}{3}}$ 是質數，則 $k^2 + k + n$ 對於所有整數 k, $0 \leq k \leq n-2$，都是質數。