

第 27 屆 IMO

Warsaw, Poland

Day I

July 9, 1986

1. 設正整數 d 不等於 2, 5, 13。證明在集合 $\{2, 5, 13, d\}$ 中可以找到不同兩個元素 a, b ，使得 $ab - 1$ 不是完全平方數。
2. 平面上給定 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 及點 P_0 ，定義 $A_s = A_{s-3}, s \geq 4$ 。造點列 P_0, P_1, P_2, \dots 使得 P_{k+1} 圍繞中心 A_{k+1} 順時針旋轉 120° 時 P_k 所達到的位置， $k = 0, 1, 2, \dots$ ，若 $P_{1986} = P_0$ ，證明 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 為等邊三角形。
3. 正五邊形的每個頂點對應一個整數使得這五個整數的和為正。若其中三個相連頂點相應的整數依次為 x, y, z ，而中間的 $y < 0$ 則要進行下述的操作：將 x, y, z 分別換為 $x + y, -y, z + y$ 。只要所得的五個整數中至少還有一個為負時，這種操作就繼續進行。試問能否這樣的操作進行有限次後必定終止？

第 27 屆 IMO

Warsaw, Poland

Day II

July 10, 1986

4. 設 O 是正 $n(n \geq 5)$ 邊形的中心，設 A, B 是一對相鄰的頂點。設開始的時候三角形 XYZ 與三角形 OAB 重合，現用如下的方式移動三角形 XYZ ：保持 Y, Z 始終在多邊形的邊界上、 X 在多邊形的內部。試求出當 Y, Z 都走遍多邊形的邊界時 X 點所形成的軌跡。

5. 令 f 為定義於非負實數集上的且取非負實數值的函數，求所有滿足下列條件的

f ：

(1) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$,

(2) $f(2) = 0$,

(3) $f(x) \neq 0$, 當 $0 \leq x < 2$ 。

6. 平面上有限個點構成一個集合，其中每個點的座標為整數。可不可以把此集合中某些點染成紅色，而其餘的點染成白色，使得與縱、橫坐標軸平行的任一條直線 L 上所包含的紅、白點的個數至多相差一個？