第二十六屆，1985

1985 年 7 月 4-5 日赫爾辛基

Day I

1. 一圓其圓心在四邊形 $ABCD$ 之一邊 AB 上。其他三邊與圓相切，證明 $AD+BC=AB$ 。

2. 令 n 與 k 為二已給的互質自然數， $0<k<n$ 。在集合 $M=\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中的每一數皆被塗上藍色或白色。已知

   (i) 對每一 $i\in M$ ， i 與 $n-i$ 同色，且

   (ii) 對每一 $i\in M$ ， $i\neq k$ ， i 與 $|i-k|$ 同色。

   證明 M 中所有的數都同色。

3. 對任意整係數的多項式

   $P(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_kx^k$ ，係數為奇數的個數以 $W(P)$ 表示。對

   $i=0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots$

   令 $Q_i(x)=(1+x)^i$ 。證明若整數 $i_1,\ i_2,\cdots\cdots,\ i_n$ 有 $0\le i_1<i_2<\cdots\cdots<i_n$ ，則

   $W(Q_{i1}+Q_{i2}+\cdots\cdots+Q_{in})\ge W(Q_{i1})$ 。

Day II

4. 給了一個集合 M 包含 1985 個相異正整數，沒有一個的質因數超過 26。證明 M 中至少包含一組 4 個相異元素其積為某整數的四次方。

5. 一圓以 O 為圓心通過三角形 ABC 的頂點 A 與 C，並分別與線段 AB, BC 交於 K 及 N。三角形 ABC 及 KBN 之內切圓恰相交成兩相異點 B 及 M。證明角 OMB 為一直角。

6. 對每一實數 x_1，對每一 $n \geq 1$，作

$$x_{n+1} = x_n \cdot (x_n + \frac{1}{n})$$

而得數列 $x_1, x_2 \cdots\cdots$。證明 x_1 恰有一值使得 $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ 對所有的 n 成立。