第二十五屆，1984

Day I

1. 證明

$$0 \le yz + zx + xy - 2xyz \le \frac{7}{27}$$

其中 x, y, z 為非負實數而且 $x + y + z = 1$

2. 找出一對正整數 a, b 使得
   (1) $ab(a+b)$ 不被 7 整除。
   (2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ 被 7^7 整除。
   並加以證明。

3. 在平面上給了兩點 O, A。對平面上的每一點 X，異於 O，以 $a(X)$ 表示介於 OA 及 OX 的角度的弧度數，從 OA 反時間方向度量。($0 \le a(X) < 2\pi$)。令 $C(X)$ 為以 O 為圓心，以長度 $OX + \frac{a(X)}{OX}$ 為半徑的圓。平面上的每一點都塗上了有限多種顏色的一種。證明存在一點 Y 使得 $a(Y) > 0$ 而且其顏色出現在圓 $C(Y)$ 的圓周上。

Day II

4. 令 $ABCD$ 為凸四邊形，CD 與以 AB 為直徑的圓相切。證明 AB 與以 CD 為直徑的圓相切的充要條件是 BC 平行於 AD 。

5. 令 d 為一平面凸 n 邊形的所有對角線的長度之和。 $(n>3)$ ，令 p 為其周長。證明
$$n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

6. 令 $a,b,\ c,\ d$ 為奇數使得 $0<a<b<c<d$ 而且 $ad=bc$ 。證明若 $a+d=2^k$ ，$b+c=2^m$ ，其中 k 與 m 為某二整數，則 $a=1$ 。