

第二十四屆，1983

1983年7月6-7日巴黎

Day I

1. 找出所有在正實數集合上定義取正實數值並滿足條件

(i) 對所有的正數 x, y , $f(xf(y)) = yf(x)$

(ii) 當 $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \rightarrow 0$

的函數 f 。

2. 兩個圓心分別為 O_1 及 O_2 的共面而不等的圓交於兩點，其中之一為 A 。圓的一條公切線切 C_1 於 P_1 ，切 C_2 於 P_2 ，而另一條切 C_1 於 Q_1 ，切 C_2 於 Q_2 。令 M_1 為 P_1Q_1 的中點， M_2 為 P_2Q_2 的中點。證明角 O_1AO_2 及 M_1AM_2 相等。

3. 令 a, b, c 為正整數，其中沒有兩個有大於 1 的公因數。證明

$$2abc - ab - bc - ca$$

是不能表為

$$xbc + yca + zbc$$

形式的最大整數，其中 x, y, z 為非負整數。

Day II

4. 令 ABC 為等邊三角形，而 E 是包含在三條線段 AB, BC 及 CA 內的所有點集合（包含 A, B 及 C ）。決定下列命題之真偽，並給理由。對於由集合 E 所分割成的兩個互斥子集，至少有一個子集包含了某一個直角三角形的所有頂點。
5. 是否可選取 1983 個相異的正整數，全都小於或等於 10^5 ，其中沒有三個成等差級數。說明理由。
6. 令 a, b, c 為一個三角形的邊長。證明 $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$ 決定何時等號出現。