第二十三屆，1982

Day I

1. 函數 $f(n)$ 定義在所有正整數 n 上並取非負整數值，而且對所有的 m,n

$$f(m+n)-f(n)-f(n)=0 \text{ 或 } 1；$$

$$f(2)=0,\quad f(3)>0,\quad f(9999)=3333$$

決定 $f(1982)$。

2. 給了一個非等腰三角形 $A_1A_2A_3$，邊長 a_1,a_2,a_3。（a_i 是 A_i 的對邊）。對所有的 $i=1,2,3$，M_i 是邊 a_i 的中點，T_i 是內切圓切邊 a_i 的切點，而 T_i 對 A_i 的內角平分線的鏡像得點 S_i。證明三線 M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 共點。

3. 考慮具有下列性質
$x_0=1$，對所有 $i\ge 0, x_{i+1}\le x_i$
的正實數的無窮數列
(a) 證明對所有的這種數列，有一個 $n\ge 1$ 使得
$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\ge 3.999$$
(b) 找一個這種級數使得對所有的 n
$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$$

Day II

4. 證明若 n 是一正整數使方程
   $x^3+3xy^2+y^3=n$
   有整數解 (x,y)，則它至少有三個這種解。
   證明當 $n=2891$ 時方程沒有整數解。

5. 正六角形 $ABCDEF$ 的對角線 AC 及 CE 分別被內點 M 及 N 所分割使得
   $$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$$
   若 B, M 及 N 共線決定 r。

6. 令 S 為一個邊長 100 的正方形並令 L 為 S 中的一條路徑，自己不相交，由線段 $A_0A_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 所組成，$A_0 \neq A_n$。假定對 S 的邊界的每一點 P，L 上有一點距 P 不超過 $\frac{1}{2}$。證明在 L 上有兩點 X 及 Y。它們的距離不超過 1，而 L 上介於 X 及 Y 之間的長度不小於 198。