第二十二屆，1981

Day I

1. P 為已給三角形內之一點。D, E, F 分別為從 P 到 BC, CA, AB 三邊的垂足。求所有的 P 使 $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ 為最小。

2. 令 $1 \le r \le n$ 並考慮集合 $\{1,2,\cdots\cdots\cdots,n\}$ 中所有 r 個元素的子集合。並考慮各個這種子集中之最小數。$F(n,r)$ 表示這些最小數之算術平均值；證明

$$F(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$$

3. 求出 m^2+n^2 之最大值，其中 m, n 為滿足 $m, n \in \{1,2,\cdots\cdots\cdots,1981\}$ 且 $(n^2-mn-m^2)^2=1$ 之整數。

Day II

4. (a) 對什麼樣的$n>2$有n個連續正整數使其中之最大數為其餘$n-1$個數的最小公倍數的因數？
   (b) 對什麼樣的$n>2$正好只有一個集合滿足上述性質？

5. 三個全等的圓有一共同點O，並且落在一個已給的三角形內。每一個圓都與此三角形的兩邊相切。證明此三角形的內心、外心及O點共線。

6. 函數 $f(x, y)$ 對所有非負整數 x, y 滿足

   (1) $f\left(0, y\right)=y+1$

   (2) $f\left(x+1,0\right)=f(x,1)$

   (3) $f\left(x+1, y+1\right)=f$?$x, f(x+$ (, y]

   求 $f(4, 1981)$