第二十一屆，1979

Day I

1. 令 p 與 q 為自然數，且
$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}。$$
證明 p 可被 1979 所整除。

2. 一個角柱之上、下底分別為五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$。這兩個五邊形的每一邊以及所有的線段 $A_iB_j(i,j=1,2,\cdots\cdots,5)$ 都要著以紅色或綠色。

   每一個三角形，如果它的頂點都是角柱的頂點且它的三邊都被著色的話，那麼它最少要有兩邊不同色。證明上、下兩底的十個邊必定同一顏色。

3. 一平面上有相交的兩個圓，設 A 為它們的一個交點，現在有兩質點各自以恒速從 A 點出發，同依順時針方向或同依逆時針方向，繞各自的圓移動，在繞過一圈之後這兩個質點又同時回到 A 點。證明在這個平面上有一固定的點 P，使得在任何時刻，P 點與這兩個動點的距離都相等。

Day II

4. 給定一平面π。P點在這個平面上而Q點不在π上，求π上所有的點R，使得$(QR+PR)/QR$為最大者。

5. 求所有的實數a，使得對於它，存在有非負的實數x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，滿足下列關係：

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3。$$

6. 令A與E為一個正八邊形的相對頂點，一隻青蛙從A點開始跳動，除了E點外，從八邊形中的其他每一個頂點都可以跳至與它相鄰兩頂點中的任何其一。當它跳到E點時，它就停在那裡不動。令a_n為跳過n次以後到達E點的所有跳動路線的數目。證明

$$a_{2^n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1} - y^{n-1}\right),\ n = 1,2,3,\cdots$$

其中$x = 2+\sqrt{2}, y = 2-\sqrt{2}$。

注意：n次跳動的一個路線是一系列的頂點$(P_0, \cdots\cdots P_n)$，使得

(i) $P_0 = A, P_n = E$

(ii) 對於每一個$i, 0 < i \le n-1$，P_i異於E。

(iii) 對於每一個$i, 0 < i \le n-1$，P_i與P_{i+1}為相鄰頂點。