

Day I

1. 在正方形 $ABCD$ 中作等邊三角形 ABK, BCL, CDM 。證明線段 KL, LM, MN 的四個中點以及線段 $AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$ 的八個中點構成一個正十二邊形的頂點。
2. 在一有限項的實數敘列中，任意的相連七項之和為負，任意的相連的十一項之和為正。求出這種敘列最多有幾項。
3. 設 $n > 2$ 為一已給整數，而 V_n 為整數 $1 + kn$ ，其中 $k = 1, 2, \dots$ 的集合。一數 $m \in V_n$ 若不存在數 $p, q \in V_n$ 使得 $pq = m$ 則稱之為不可分解。證明存在一數 $r \in V_n$ ，它有多於一種方式表為 V_n 中不可分解數的乘積。(乘積中若僅是因數的順序不同，視為一種分解。)

Day II

4. 給定四個實數常數 a, b, A, B 及

$$f(\theta) = 1 - a \cos \theta - b \sin \theta - A \cos 2\theta - B \sin 2\theta$$

證明 $f(\theta) \geq 0$ 對所有實數 θ 成立，則

$$a^2 + b^2 \leq 2 \text{ 且 } A^2 + B^2 \leq 1$$

5. 設 a, b 為正整數，當 $a^2 + b^2$ 除以 $a + b$ 時，商數是 q 而餘數是 r 。求所有數對 (a, b) 使得 $q^2 + r = 1977$ 。

6. 設 $f(n)$ 為定義在所有正整數上的一個正整數數值的函數。證明若

$$f(n+1) > f(f(n))$$

對每一個正整數 n 成立，則

$$f(n) = n$$

對每一個 n 成立。