第十八屆，1976

Day I

1. 一平面凸四邊形的面積是 32，兩對邊與一對角線之和為 16。求另一對角線之所有可能的長度。

2. 令 $P_1(x)=x^2-2$, $P_j(x)=P_1(P_{j-1}(x))$, $j=2,3,\cdots\cdots$ 證明對任一個正整數 n，方程式 $P_n(x)=x$ 的所有根是實數且相異。

3. 一個長方形的箱子可以用單位正立方體完全裝滿，如果用體積為 2 的正立方體來儘量裝填，使得每個邊都與箱子的邊平行，則恰能裝滿箱子的 40%，求所有這種箱子的可能尺寸（長、寬、高）。

Day II

4. 將 1976 分解成一些正整數之和，求這些正整數之乘積之最大值，並加以註明。

5. 考慮 p 個方程式， $q=2p$ 個未知數 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ ：

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1q}x_q = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2q}x_q = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{pq}x_q = 0
\end{aligned}$$

係數 $a_{ij} \in \{-1,0,1\}$ 。證明此組方程式有一解($x_1, x_2, \cdots, x_q$)使得

(a) 所有 $x_j (j=1,2,\cdots,q)$ 為整數

(b) 至少有一個 j 使 $x_j \neq 0$

(c) $\left|x_j\right| \le q \ (j=1,2,\cdots,q)$

6. 一敘列 $\{u_n\}$ 定義為

$u_0 = 2, u_1 = \dfrac{5}{2}, u_{n+1} = u_n\left(u_{n-1}^2 - 2\right) - u_1, n = 1,2,\cdots$ 證明對正整數 n

$$[u_n] = 2^{\left[2^n - (-1)^n\right]/3}$$

其中 $[x]$ 表示不大於 x 之最大整數。