

1. 點 O 在線 g 上： OP_1, OP_2, \dots, OP_n 為單位長向量，而點 P_1, P_2, \dots, P_n 落在含 g 的平面上且在 g 的同側。證明若 n 為奇數，則

$$|OP_1 + OP_2 + \dots + OP_n| \geq 1$$

這裡符號 “ $||$ ” 代表向量的長度。

2. 判定在空間中是否存在一不共面的有限點集 M 使得，對 M 中的任意兩點 A, B ，我們可在 M 中選取另二點 C 及 D 使得直線 AB 與 CD 平行而不相交。
3. 設 a 及 b 為實數使得方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

至少有一實根。對所有這種數對 (a, b) 求 $a^2 + b^2$ 之小值。

Day II

4. 一個士兵需要在一個等邊三角形的區域內探測有沒有地雷。他的掃雷器之有效半徑是三角形的高的一半。士兵從三角形之一頂點出發，他應走何路徑使得路程最少而又能達成任務。

5. G 是

$$f(x) = ax + b, a \text{ 及 } b \text{ 為實數}$$

型的非常數函數的一個集合， G 具有下列性質：

- (a) 若 f, g 屬於 G ，則合成函數 $g \circ f$ 也屬於 G 。
(b) 若 f 屬於 G ，則其反函數 f^{-1} 也在 G 中；在這裡

$$f(x) = ax + b \text{ 的反函數是 } f^{-1}(x) = (x - b) / a \text{。}$$

- (c) 對每一個 f 屬於 G ，存在一實數 x_f ，使得 $f(x_f) = x_f$ 證明存在一實數 k

使得 $f(k) = k$ 對所 G 有中的 f 成立。

6. 設 a_1, a_2, \dots, a_n 為 n 個實數，又設 q 為一已給實數使得 $0 < q < 1$ 。求 n 個數 b_1, b_2, \dots, b_n 使得

- (a) $a_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n$ 成立

- (b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ 對 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 成立

- (c) $b_1 + b_2 + \dots + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$