

第十四屆，1972

Day I

1. 證明從十個相異的二位數（十進位制）中，可以選出兩個不相交的子集，使得其元素之數值和相等。
2. 證明若 $n \geq 4$ ，每一個可以內接於一圓之四邊形可以分割成 n 個四邊形，使每一個都能內接於一圓。
3. 設 m, n 為任意非負整數。證明

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

為一整數。(0! = 1)

Day II

4. 求下列聯立不等式之所有解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0$$

$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0$$

$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0$$

$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0$$

$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0$$

其中 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 為正實數。

5. 設 f 與 g 為實值函數，對所有實數 x 及 y 有定義，並對所有 x, y 滿足方程式

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

證明若 $f(x)$ 非恆等於 0，且若對所有 x ， $|f(x)| \leq 1$ ，則對所有 y ， $|g(y)| \leq 1$ 。

6. 給定 4 個相異的平行平面，證明存在一個正四面體使得每一平面上有一頂點。