第十三屆，1971

Day I

1. 證明下列命題對 $n=3$ 及 $n=5$ 成立，而對其他自然數 $n>2$ 不成立：
   若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 為任意實數，則

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)\\&+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\ge 0\end{aligned}$$

2. 考慮一個凸多邊形 P_1，有九個頂點 $A_1, A_2, \ldots, A_9$，將頂點 A_1 平移至 $A_i (i=2,3,\ldots,9)$ 時 P_1 平移成多邊形 P_i。證明 $P_1, P_i, \ldots, P_9$ 之中至少有兩個具有一共同內點。

3. 證明 $2^k-3 (k=2,3,\cdots)$ 型的整數集合中，包含一無窮子集，其中任二元素均互質。

Day II

4. 四面體 $ABCD$ 的所有的面都是銳角三角形。我們考慮如下定義的 $XYZTX$ 型的多邊形路徑：X 為 AB 邊上與 A, B 相異的點；同樣地，Y, Z, T 分別為 BC, CD, DA 邊上的內點。證明：
   (a). 若 $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$，則在所有的多邊形路徑中，沒有一條是長度最小的。
   (b). 若 $\angle DAB + \angle BCD = \angle CDA + \angle ABC$，則有無窮多條最短的多邊形路徑，它們的共同長度是 $2AC\sin(\alpha/2)$，其中 $\alpha = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$。

5. 證明對每一個自然數 m，在平面上存在一有限的點集合具有下列性質：對 S 中的每一點 A，在 S 中正好有 m 個點與 A 之距離為單位長。

6. 設 $A = (a_{ij})(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 為一方陣其元素為非負整數。假定當一元素 $a_{ij} = 0$ 時，i 列的元素和以及 j 行的元素和都 $\geq n$。
   證明此方陣之所有元素和 $\geq n^2/2$。