第十二屆，1970

Day I

1. 設 M 為 ΔABC 之邊 AB 上之一點。令 r_1, r_2 及 r 為三角形 AMC, BMC 及 ABC 之內切圓之半徑。令 q_1, q_2 及 q 為同樣的三個三角形在角 ACB 內的傍切圓之半徑。證明

$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{q}$$

2. 設 a, b 及 n 為大於 1 之整數，以 a 及 b 作為兩種進位制的基（即 a 進位制及 b 進位制）。A_{n-1} 及 A_n 為 a 進位制中的數，B_{n-1} 及 B_n 為 b 進位制中的數；它們的各位數之關連如下：

$A_n = x_n x_{n-1} \cdots\cdots x_0$ ，$A_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \cdots\cdots x_0$ $\quad x_n \neq 0$

$B_n = x_n x_{n-1} \cdots\cdots x_0$ ，$B_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \cdots\cdots x_0$ $\quad x_{n-1} \neq 0$

證明 $\dfrac{A_{n-1}}{A_n} < \dfrac{B_{n-1}}{B_n}$ 若且唯若 $a > b$

3. 實數 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 滿足條件：

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots\cdots \leq a_n \leq \cdots\cdots$$

數 $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ 如下定義：

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

(a). 證明對所有 n ，$0 \leq b_n < 2$

(b). 給定 C ，$0 \leq C < 2$，證明存在具有以上性質的 $a_0, a_1, \cdots\cdots$ 使得對足夠大的 n ，$b_n > C$ 。

Day II

4. 找出具有下列性質的所有正整數n的集合：

   $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$可以分成兩個子集，使得一個子集中的元素之乘積等於另一子集中元素之乘積。

5. 在四面體$ABCD$中，角BDC為直角。假設從D到平面ABC的垂足H是ΔABC的高的交點（即垂心）。證明

   $$(AB+BC+CA)^2 \le 6(AD^2+BD^2+CD^2)$$

   又對何種四面體等式成立？

6. 在一平面上有 100 個點，任意三點不共線。考慮以這些點為頂點的所有可能的三角形。證明這些三角形之中銳角三角形者不超過 70%。