第十一屆，1969

Day I

1. 證明有無窮多個自然數a具有下列性質：對任意自然數n，$z=n^4+a$不是質數。

2. 設$a_1,a_2,\cdots,a_n$為實常數，x為實變數，而

$$f\left(x\right)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{4}\cos(a_3+x)+\cdots+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)$$

已知$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$，證明對某整數$m$，$x_2-x_1=m\pi$。

3. 對每一個$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$找出數$a>0$之充要條件使得存在一四面體，其中k個邊之長度均為a，而其餘$6-k$個邊的長度均為1。

Day II

4. 以 AB 為直徑作一半圓弧，C 為 r 上異於 A, B 之一點，D 為從 C 至 AB 的垂足。我們考慮三個圓 r_1, r_2, r_3 ，都和線 AB 相切。在這些之中，r_1 內切於 ΔABC ，而 r_2 及 r_3 各落在 CD 之一側，都同時與 CD 及 r 相切。證明 r_1, r_2 及 r_3 還有一條共同的切線。

5. 在平面上給了 $n>4$ 個點，任意三點不共線。證明至少有 $\binom{n-3}{2}$ 個凸四邊形，其頂點為已給的點集中之四點。

6. 證明對所有實數 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ，具有性質

$x_1 > 0, x_2 > 0, x_1y_1 - z_1^2 > 0, x_2y_2 - z_2^2 > 0$ 者，不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

恆成立。又等號成立的充要條件是什麼？