



## Day II

4. 證明在每一個四面體上都有一頂點使得在此點相會之三邊，其長為一三角形之邊。

5. 設  $f$  為定義在所有實數  $x$  上之一實值函數，而對某正常數  $a$ ，方程式

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} \text{ 對所有 } x \text{ 成立。}$$

(a). 證明函數  $f$  為週期的（即存在一正數  $b$  使得  $f(x+b) = f(x)$  對所有  $x$  成立）。

(b). 對  $a = 1$ ，給出一個具有所要求的性質而不是常數的函數。

6. 對所有自然數  $n$ ，算出下和

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[ \frac{n+1}{2} \right] + \left[ \frac{n+2}{4} \right] + \cdots + \left[ \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \cdots$$

（ $[x]$  表示不超過  $x$  之最大之整數）