第九屆，1967

Day I

1. 設 $ABCD$ 為一平行四邊形，邊長 $AB=a, AD=1$，而 $\angle BAD=\alpha$。若 ΔABD 為銳角，證明以 A, B, C, D 為圓心，半徑為 1 的四個圓覆蓋此平行四邊形之充要條件是 $a \le \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$

2. 證明若四面體有且僅有一邊大於 1，則其體積 $\le \frac{1}{8}$。

3. 設 k, m, n 為自然數而 $m+k+1$ 為一大於 $n+1$ 的質數。
令 $C_s = s(s+1)$。證明乘積
$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 被乘積 $C_1C_2\cdots C_n$ 所整除。

Day II

4. 設 $A_0B_0C_0$ 及 $A_1B_1C_1$ 為任意兩個銳角三角形。考慮所有與 $\Delta A_1B_1C_1$ 相似而且外接於三角形 $A_0B_0C_0$ 之三角形 ABC（頂點 A, B, C 分別對應於 A_1, B_1, C_1）。在所有可能的這種三角形之中，找出一個具有最大面積的，並作圖。

5. 考慮數列 $\{C_n\}$，其中

$$
\begin{aligned}
&C_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \\
&C_2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 \\
&\vdots \\
&C_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 為實數，不全為 0。假設 $\{C_n\}$ 中有無窮多項等於 0，求所有使 $C_n = 0$ 的自然數 n。

6. 在一運動會中，連續 n 天內($n > 1$)一共發了 m 面獎牌。在第一天，頒發了一面獎牌以及剩下 $m-1$ 面中的 $\frac{1}{7}$。第二天，頒發了兩面獎牌以及那時剩下的 $\frac{1}{7}$；依此類推。在最後一天即第 n 天，剩下的 n 面獎牌全部頒發完畢。此運動會共舉行幾天，又一共頒發多少面獎牌？