

第八屆，1966

Day I

1. 在一數學競試中，共出了 A, B, C 三題，在與賽學生其中，有 25 個學生每人至少答對了一題。在所有未答對問題 A 的學生中，答對 B 的人數是答對 C 的人數的兩倍。只答對問題 A 的學生人數比既答對 A 又至少答對其他一題的學生人數多 1。在所有恰好答對一題的學生中，有一半沒有答對 A。有多少學生只答對 B？

2. 設  $a, b, c$  為三角形的邊長，而  $\alpha, \beta, \gamma$  分別為對應的角。證明若

$$a + b = \tan \frac{\gamma}{2} + (a \tan \alpha + b \tan \beta)$$

此三角形為等腰。

3. 證明：從一正四面體之內切圓圓心至各頂點距離之和小於從空間中任意其他點至各頂點距離之和。

Day II

4. 證明對每一個自然數  $n$ ，對每一個實數  $x \neq \frac{k\pi}{2^t}$  ( $t=0,1,\dots,n$ ;  $k$  任意整數)

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

5. 解方程組

$$|a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1$$

其中  $a_1, a_2, a_3, a_4$  為四個相異實數。

6. 在三角形  $ABC$  的邊  $BC, CA, AB$  上分別任選三內點  $K, L, M$ 。證明三角形  $AML, BKM, CLK$  之中，至少有一個的面積小於或等於三角形  $ABC$  的四分之一。