

第七屆，1965

Day I

1. 在區間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 中找出滿足下列不等式

$$2 \cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leq \sqrt{2}$$

之所有 x 值。

2. 考慮未知數 x_1, x_2, x_3 的方程組

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

係數滿足下列條件：

- (a). a_{11}, a_{22}, a_{33} 為正數。
- (b). 其餘係數為負數。
- (c). 每一個方程中係數之和為正。

證明所給方程組只有明顯解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 。

3. 給了四面體 $ABCD$ 其邊 AB 及 CD 之長度分別為 a, b 。歪斜線 AB 與 CD 之距離為 d ，其夾角為 ω 。平行於 AB 及 CD 的平面 ε 將四面體分割成兩塊立體。從 AB 與 CD 至 ε 的距離比等於 κ 。計算所得兩塊立體之體積比。

Day II

4. 四實數 x_1, x_2, x_3, x_4 任意三數之乘積再加上第四數都等於 2。求出所有這種四數組。
5. 考慮 $\triangle OAB$ ，銳角 AOB 。從一點 $M \neq O$ 向 OA 及 OB 畫垂線，垂足分別為 P 與 Q 。 $\triangle OPQ$ 的垂心 H ，當 M 在 (a) 邊 AB 上 (b) $\triangle OAB$ 內移動時， H 的軌跡為何？
6. 平面上給了 n 個點 ($n \geq 3$)，每兩點都以線段相連，令 d 為其中最長的線段。我們定對長度為 d 的線段為直徑。證明所給點集之直徑最多有 n 條。