

第六屆，1964

Day I

1. (a). 求所有正整數  $n$  使  $2^n - 1$  被 7 整除。  
(b). 證明沒有正整數  $n$  能使  $2^n + 1$  被 7 整除。
2. 假設  $a, b, c$ ，為三角形的邊長。證明

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

3. 一圓內切於三角形  $ABC$ ，其邊長為  $a, b, c$ ，平行於三角形的各邊，分別作圓的切線。每一條切線都在  $\triangle ABC$  中切出一小三角形。在每一個這種小三角形中，分別作內切圓。求這四個內切圓的面積之和（以  $a, b, c$  表之）。

## Day II

4. 十七個人互相通信：每一個人和其他人都互相寫信。在他們的信上的有討論三種不同的話題。每一對筆友只寫一種話題。證明至少有三個人他們筆談的是同一話題。
5. 假設平面上有五個點，任意兩點的連線都不平行，不垂直。從每一個點向其他四點兩兩相連的直線分別作垂線。決定所有這些垂線交點之最大數。
6. 在四面體  $ABCD$  中，將頂點  $D$  與  $\triangle ABC$  的中心  $D_0$  相連，過  $A, B, C$  作  $DD_0$  的平線，這些線分別截平面  $BCD, CAD$  及  $ABD$  於點  $A_1, B_1, C_1$ 。證明  $ABCD$  的體積是  $A_1B_1C_1D_1$  體積的三分之一。如果  $D_0$  為  $\triangle ABC$  中任意之點，結果仍然對嗎？