

第五屆，1963

Day I

1. 找出下列方程之所有實根

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

其中 p 為一實參數。

2. 給了一點 A 及線段 BC 。在空間中之直角其一股過 A ，另一股交 BC ，求此種直角之頂點之軌跡。

3. 在一個 n 邊形中，所有的內角都相等，依序的邊長滿足

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$$

證明 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 。

Day II

4. 找出下列方程組之所有解：

$$(1) x_5 + x_2 = yx_1$$

$$(2) x_1 + x_3 = yx_2$$

$$(3) x_2 + x_4 = yx_3$$

$$(4) x_3 + x_5 = yx_4$$

$$(5) x_4 + x_1 = yx_5$$

其中 y 為一參數。

5. 證明 $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

6. 五位同學 A, B, C, D, E 參加競試，有一種猜測說，比賽結果會是 ABCDE 的順序，這種猜測太離譜了。事實上沒有一位同學的名次和預測一樣，而且猜測中名次要相連的兩位，結果都不然。另一種猜測說，結果會是 DAECB 的順序，這猜得還不錯，恰有兩位所得名次與預測相同，而且有兩對同學，預測名次會相連，結果正是如此。決定出最後的名次為何？