

第四屆，1962

Day I

- 找出具有下列各性質的最小正整數 n ：
 - 它的十進位表示中最後一位數（即個位數）為 6。
 - 如果把最後的位數 6 擦掉，並放在其他位數之前，則結果所得的數為原數 n 的四倍大。

- 決定出所有滿足下列不等式的實數 x ：

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

- 考慮正立方體 $ABCD A' B' C' D'$ （ $ABCD$ 與 $A' B' C' D'$ 分別為上底與下底，而 AA', BB', CC', DD' 為平行的）。一點 X 沿著正方形 $ABCD$ 的周界以 $ABCD A$ 的方向作等速運動，而 Y 點以同樣的速率沿著正方形 $B' C' C B B'$ 的周界以 $B' C' C B B'$ 的方向運動。點 X 與 Y 在同一時刻分別從起點 A 與 B' 開始運動。決定並畫出線段 XY 的中點的軌跡。

Day II

4. 解方程式 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.
5. 在圓 K 上給定三個相異點 A, B, C 。在 K 上作一第四點 D （只用直尺與圓規作圖），使得此四點所形成的四邊形有一內切圓。
6. 考慮一個等腰三角形。設 r 為其外接圓之半徑， ρ 為其內切圓之半徑。證明這兩個圓的圓心的距離是

$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

7. 四面體 $SABC$ 具有下列性質：存在五個圓球，每一個都與邊 SA, SB, SC, BC, CA, AB 或其延長線相切。
 - (a). 證明此四面體是正四面體。
 - (b). 反過來證明每一個正四面體都存在五個這種圓球。