

第三屆，1961

Day I

1. 解方程組

$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\xy &= z^2\end{aligned}$$

其中  $a$  及  $b$  為常數。求  $a$  及  $b$  必備的條件使得  $x, y, z$  (方程組之解) 為相異正數。

2. 令  $a, b, c$  為一三角形之邊， $T$  為其面積。證明：

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T。在何種情況下等號成立？$$

3. 解方程式  $\cos^n x - \sin^n x = 1$ ，其中  $n$  為一自然數。

Day II

4. 考慮三角形  $P_1P_2P_3$  及其內一點  $P$ ，直線  $P_1P, P_2P, P_3P$  分別交對邊於  $Q_1, Q_2, Q_3$ 。證

明下列三數

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3} \text{ 之中，至少有一} \leq 2, \text{ 至少有一} \geq 2。$$

5. 作三角形  $ABC$  使  $AC = b, AB = c, \angle AMB = \omega$ ，其中  $M$  為線段  $BC$  之中點而  $\omega < 90^\circ$ 。證明有解之充要條件是

$$b \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$$

又在何種情況下等式成立？

6. 考慮一平面  $\varepsilon$  及在  $\varepsilon$  同側的三個不共線的點  $A, B, C$ ；假定由此三點決定的平面與  $\varepsilon$  不平行。在平面  $\varepsilon$  上取三個任意點  $A', B', C'$ 。令  $L, M, N$  為線段  $AA', BB', CC'$  上之中點；令  $G$  為三角形  $LMN$  之中心。當  $A', B', C'$  在平面上自由而獨立地移動時， $G$  點的軌跡是什麼？（我們只考慮那種  $A', B', C'$  使得  $L, M, N$  既不共線也不共點的情形）。