

第三屆，1961

Day I

1. 解方程組

$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\xy &= z^2\end{aligned}$$

其中 a 及 b 為常數。求 a 及 b 必備的條件使得 x, y, z (方程組之解) 為相異正數。

2. 令 a, b, c 為一三角形之邊， T 為其面積。證明：

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T。在何種情況下等號成立？$$

3. 解方程式 $\cos^n x - \sin^n x = 1$ ，其中 n 為一自然數。

Day II

4. 考慮三角形 $P_1P_2P_3$ 及其內一點 P ，直線 P_1P, P_2P, P_3P 分別交對邊於 Q_1, Q_2, Q_3 。證

明下列三數

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3} \text{ 之中，至少有一} \leq 2, \text{ 至少有一} \geq 2。$$

5. 作三角形 ABC 使 $AC = b, AB = c, \angle AMB = \omega$ ，其中 M 為線段 BC 之中點而 $\omega < 90^\circ$ 。證明有解之充要條件是

$$b \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$$

又在何種情況下等式成立？

6. 考慮一平面 ε 及在 ε 同側的三個不共線的點 A, B, C ；假定由此三點決定的平面與 ε 不平行。在平面 ε 上取三個任意點 A', B', C' 。令 L, M, N 為線段 AA', BB', CC' 上之中點；令 G 為三角形 LMN 之中心。當 A', B', C' 在平面上自由而獨立地移動時， G 點的軌跡是什麼？（我們只考慮那種 A', B', C' 使得 L, M, N 既不共線也不共點的情形）。