

第二屆，1960

Day I

1. 找出所有具有下列性質的三位數 N ： N 被 11 整除且 $N/11$ 等於 N 的各位數的平方和。
2. 對變數 x 的何值下列不等式成立：

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9?$$

3. 已給一直角三角形 ABC ，斜邊 BC 之長為 a ，將它分成 n 等分（ n 為奇整數）。令 α 為從 A 點向包含斜邊上中點的那一小段線段所張之銳角。令 h 為斜邊上的高。證明

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

Day II

4. 已知 h_a, h_b (從 A 及 B 引出的高) 及 m_a (從 A 引出的中線), 求作三角形 ABC 。
5. 考慮正立方體 $ABCD A' B' C' D'$ (上底面 $ABCD$, 下底面 $A' B' C' D'$)。
 - (a). 求線段 XY 之中點的軌跡, 其中 X 為 AC 上任意點, Y 為 $B' D'$ 上任意點。
 - (b). 求在(a).中線段 XY 上而滿足 $ZY = 2XZ$ 之點的軌跡。
6. 考慮一圓錐體, 其內有一內接圓球, 與圓錐的底面相切。又有一圓柱體外切於此圓球, 其底面落在圓錐的底面上。令 V_1 為圓錐的體積, V_2 為圓柱的體積。
 - (a). 證明 $V_1 \neq V_2$
 - (b). 求最小的數 k 使 $V_1 = kV_2$; 在此情況中, 作出圓錐底面上直徑對圓錐頂點所張的角。
7. 給定一等腰梯形, 上下底為 a 及 c , 高為 h 。
 - (a). 在此梯形的對稱軸上, 求出所有點 p 使其對兩腰所張的角都是直角。
 - (b). 計算 p 至兩底的距離。
 - (c). 決定在何條件下此種點 p 確實存在。(討論各種可能的情形)。