

第一屆，1959

Day I

1. 證明分數 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 對每個自然數 n 都是最簡分數。

2. $\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})} + \sqrt{(x-\sqrt{2x-1})} = A$

在下列各情況中，分別求出 x 的實數解：

(a) $A = \sqrt{2}$, (b) $A = 1$, (c) $A = 2$

(但平方根規定只能取非負的實數值)

3. a, b, c 為質數。考慮 $\cos x$ 的二次方程式：

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

利用 a, b, c 作一 $\cos 2x$ 之二次方程式，使其根與原來方程一樣。當

$a = 4, b = 2, c = -1$ 時比較 $\cos x$ 和 $\cos 2x$ 的方程式。

Day II

4. 作一直角三角形使其斜邊為已給的 c ，而斜邊上的中線為兩股之幾何平均。
5. 在線段 AB 上任選一點 M ，在 AB 的同側分別以 AM 及 MB 為底作正方形 $AMCD$ 及 $MBEF$ ，它們的外接圓，圓心為 P 及 Q ，交於 M 而且又交於另一點 N 。以 N' 表示直線 AF 及 BC 的交點。
 - (a) 證明 N 及 N' 兩點重合。
 - (b) 證明直線 MN 通過一定點 S ，無論 M 點如何選取。
 - (c) 當 M 在 A 與 B 之間變動時，求線段 PQ 之中點之軌跡。
6. 兩平面 P 及 Q 交於一線 p 。 A 為 P 上給定之一點， C 為 Q 上給定之一點；這兩點都不在直線 p 上。作一等腰梯形 $ABCD$ (AB 平行於 CD)，使其有一內切圓，而頂點 B 及 D 分別落在平面 P 及 Q 上。