102 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）

注意事項：

(1)時間分配：2 小時（16:00～18:00）。

(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

一、已知 ΔABC 中，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$. 過頂點 A, B, C 之三條高的長度依序為 h_a, h_b, h_c；而三內角平分線長依序為 t_a, t_b, t_c. 試證明：

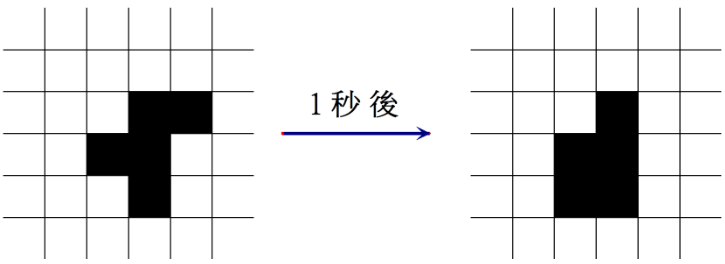
(1) 若 ΔABC 不是直角三角形，則 $a>b>c$ 之充要條件為

$$a^{2013}+h_a^{2013}>b^{2013}+h_b^{2013}>c^{2013}+h_c^{2013}.$$

(2) 若 ΔABC 為 $b=c$ 的等腰三角形，則 $a>b$ 之充要條件為

$$a^2+t_a^2>b^2+t_b^2.$$

二、在一個無限大的棋盤上，一開始時有 2013^{102} 個格子是黑色，其他格子是白色。每隔一秒，格子顏色會變化，其變化規則如下：對於一個格子 A 而言，考慮這三個格子：(i) 格子 A、(ii) 與 A 緊鄰的上方的格子、(iii) 與 A 緊鄰的右方的格子，若這三個格子中至少有兩個是黑色格子，則在下一秒格子 A 會是黑色；否則就會是白色。參考下圖的例子：



證明：不管開始時黑色格子如何分佈，在有限的時間內整個棋盤都只剩下白色的格子。

三、設 a_k 表示正整數 k 的最大奇因數，例如：$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=3,\ a_6=3$。試求使 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-2013\right|$ 之值為最小的正整數 n。