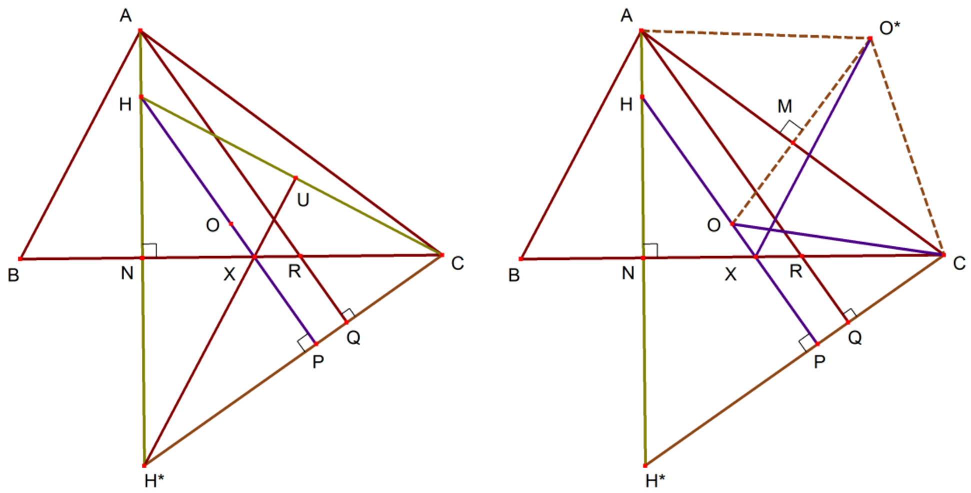
102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）【參考解答】

一、【參考解答】



1. 如左上圖，自 A 至 RC（即 BC）的垂線為 AH，故 ΔARC 的垂心 H^* 在 AH 上。令 N 為 AHH^* 與 BC 的交點。HX 交 CH^* 於 P, H^*X 交 CH 於 U。因 CN、HP 為 ΔCHH^* 的兩高，故 X 為其垂心，因此 $H^*XU \perp CH$。故 C, U, X, P 共圓，又 P, C, H, N 共圓，因此
$$\begin{aligned}\angle HXU &= \angle PCU = \angle BCH + \angle PCX \\ &= 90° - \angle B + \angle NHX = 90° - \angle B + \angle NAR\end{aligned}$$
。

2. 如右上圖，AC 的中垂線過 O 及 O^*，令 M 為 AC 的中點。
ARC（在 ΔARC 的外接圓上）所對圓周角為圓心角 $\angle AO^*C$ 的一半。故
$$\angle ARB = \frac{1}{2}\angle AO^*C = \angle CO^*M$$
。
因 $AR \parallel HOX$，$\angle OXB = \angle ARB$，是以 $\angle OXB = \angle CO^*M$，得 C, X, O, O^* 共圓，且
$$\angle HXO^* = \angle OCO^* = \angle OCA + \angle O^*CA$$
。
而
$\angle OCA = 90° - \angle B$，$\angle O^*CA = 90° - \angle CO^*M = 90° - \angle ARB = \angle NAR$。
故 $\angle HXO^* = 90° - \angle B + \angle NAR$。

3. 由 1. 及 2. 得 $\angle HXU = \angle HXO^*$。因此 O^*, H^*, X 共線。

二、【參考解答】

先計算一排 m 格相鄰異色且兩端異色的塗色方法總數，記為 $f(m)$.

1		……		m

若只要求相鄰異色，則塗色方法數為 $k(k-1)^{m-1}$.

此時塗色方法可分為兩類：

(i) 第 1 格和第 m 格異色，方法數即為 $f(m)$.

(ii) 第 1 格和第 m 格同色，此時第 1 格和第 $m-1$ 格必異色，故此類的塗色方法數為 $f(m-1)$.

由上討論知：

$$f(m)+f(m-1)=k(k-1)^{m-1} \qquad (1)$$

現在利用(1)及 $f(1)=0$ 來求 $f(m)$, $m\ge 2$.

對於 $m\ge 2$,

$$\begin{aligned} f(m) &= \left[f(m)+f(m-1)\right]-\left[f(m-1)+f(m-2)\right] \\ &\qquad +\cdots+(-1)^{m-2}\left[f(2)+f(1)\right]+(-1)^{m-1}f(1) \\ &= \sum_{i=2}^{m}(-1)^{m-i}\left[f(i)+f(i-1)\right] \\ &= \sum_{i=2}^{m}(-1)^{m-i}k(k-1)^{i-1} \end{aligned}$$

所以

$$f(m)=(k-1)^m+(-1)^m(k-1) \qquad (2)$$

以上公式(2)對於 $m\ge 1$ 皆成立，若進一步要求第 1 格塗 A 顏色，第 m 格塗 B 顏色 $(A\ne B)$，則塗色方法數為 $\dfrac{f(m)}{k(k-1)}$

以下考慮原題的塗色方法數，因為要求第 1 格、第 n 格和第 $2n$ 格的顏色互不相同，不妨設其分別塗顏色 A, B 和 C ，此時的塗色方法有

$$\frac{f(n)}{k(k-1)}\cdot\frac{f(n+1)}{k(k-1)},$$

但顏色 A, B 和 C 的選擇共有 $k(k-1)(k-2)$, 所以本題的塗色方法總數為

$$\begin{aligned} & k(k-1)(k-2)\cdot\frac{f(n)}{k(k-1)}\cdot\frac{f(n+1)}{k(k-1)} \\ &= \frac{k-2}{k(k-1)}\left[(k-1)^n+(-1)^n(k-1)\right]\left[(k-1)^{n+1}+(-1)^{n+1}(k-1)\right] \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{k}\left[(k-1)^{n-1}+(-1)^n\right]\left[(k-1)^n+(-1)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

三、【解】

$$(a,b,c)=(2\times 2013,2\times 2013,14\times 2013),$$
$$(2\times 2013,14\times 2013,2\times 2013),$$
$$(14\times 2013,2\times 2013,2\times 2013).$$

(1) 首先證明性質：

若 p,q,r 及 $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 都是有理數，則 $\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{r}$ 也都是有理數。

理由如下：令 $t=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ ，則

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2=(t-\sqrt{r})^2$$
$$\Rightarrow p+q+2\sqrt{pq}=t^2-2t\sqrt{r}+r$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{pq}=t^2-p-q+r-2t\sqrt{r}$$

將上式兩邊平方後得

$$4pq=(t^2+r-p-q)^2+4t^2r-4t\sqrt{r}(t^2+r-p-q)\text{ ，}$$

令 $A=t^2+r-p-q$ ，明顯 $A>0$ ，則因 $4pq=A^2+4t^2r-4t\sqrt{r}A$ 為有理數，

故此 $\sqrt{r}$ 為有理數。

同理可證：$\sqrt{p},\sqrt{q}$ 為有理數。

(2)求所有可能 (a,b,c) 值：

因為 a,b,c 為整數，所以 $\dfrac{2013}{a+b},\dfrac{2013}{b+c},\dfrac{2013}{c+a}$ 為有理數，又

$\sqrt{\dfrac{2013}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{2013}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{2013}{c+a}}$ 為整數，由(1)知 $\sqrt{\dfrac{2013}{a+b}},\sqrt{\dfrac{2013}{b+c}},\sqrt{\dfrac{2013}{c+a}}$ 都是有理數。

令 $\sqrt{\dfrac{2013}{a+b}}=\dfrac{m}{n}$ ，其中 m,n 為互質的正整數，因為

$$\frac{2013}{a+b}=\frac{m^2}{n^2}\Rightarrow 2013n^2=m^2(a+b)\text{ ，}$$

所以 $m^2\,|\,2013\Rightarrow m^2\,|\,3\times 11\times 61\Rightarrow m=1\Rightarrow a+b=2013n^2$ 。

同理可得：$b+c=2013x^2,\quad c+a=2013y^2$ ，其中 x,y 為正整數。

因此 $\sqrt{\dfrac{2013}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{2013}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{2013}{c+a}}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ ，由題意知此為整數，所以

$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\le 3$ 。

(i) 如果 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$，則 $n=x=y=1$，因此

$$a+b=2013=b+c=c+a\Rightarrow 2(a+b+c)=6039\text{ （不合）}$$

(ii) 如果 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ ，則 n,x,y 中必有一數為 1，另二數都是 2，因此

$2(a+b+c)=9\times 2013$（不合）。

(ii) 如果$\frac{1}{n}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，由於對稱性，為不失去一般性，不妨假設

$n\geq x\geq y>1\Rightarrow 3\geq y>1$。

如果$y=3$則

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}\leq\frac{2}{x}\Rightarrow 3=y\leq x\leq 3\Rightarrow x=3=n，$$

因此

$$a+b=3^2\times 2013,\ b+c=3^2\times 2013,\ \ c+a=3^2\times 2013$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)=27\times 2013\text{（不合）}$$

如果$y=2$則

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\leq\frac{2}{x}\Rightarrow 2=y\leq x\leq 4\Rightarrow x=2,3,4，$$

當$x=2$時，不合。

當$x=3$時，$n=6$，因此

$$a+b=6^2\times 2013,\ b+c=3^2\times 2013,\ c+a=2^2\times 2013$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)=49\times 2013\text{（不合）}$$

當$x=4\Rightarrow n=4$時，因此

$$a+b=4^2\times 2013,\ b+c=4^2\times 2013,\ c+a=2^2\times 2013$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)=36\times 2013$$

$$\Rightarrow a=2\times 2013,\ b=14\times 2013,\ c=2\times 2013$$

因取消限制條件，故得

$$\begin{aligned}(a,b,c)=\ &(2\times 2013, 2\times 2013, 14\times 2013),\\ &(2\times 2013, 14\times 2013, 2\times 2013),\\ &(14\times 2013, 2\times 2013, 2\times 2013).\end{aligned}$$