102 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

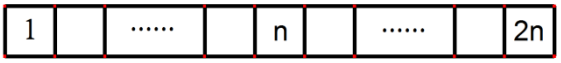
(1) 時間分配：2 小時（13:30～15:30）。

(2) 配分：每題皆為 7 分。

(3) 不可使用計算器。

一、設ΔABC的外心為O、垂心為H，直線OH與$\overline{BC}$邊交於X。作過A且與直線OH平行的直線L，L與$\overline{BC}$邊交於R, R不同於C。令ΔARC的外心為O^*、垂心為H^*。證明：X在直線O^*H^*上。

二、設正整數$n \geq 2$，如下圖所示，有$2n$個方格排成一列，今用k種顏色塗這些方格，規定相鄰的方格塗上不同的顏色，且第 1 格、第n格和第$2n$格的顏色互不相同，求符合規定的塗色方法總數。



三、設a, b, c為正整數，如果$\sqrt{\dfrac{2013}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{2013}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{2013}{c+a}}$為整數，試求滿足這樣條件的所有$(a,b,c)$。