102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）參考解答

一、【參考解答】

由 $f(x)$ 的條件得

$$
\begin{aligned}
|x_2 - x_1| &= |f(x_1) - f(x_0)| \le r|x_1 - x_0|,\\
|x_3 - x_2| &= |f(x_2) - f(x_1)| \le r|x_2 - x_1| \le r^2|x_1 - x_0|,\\
&\vdots\\
|x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le r|x_n - x_{n-1}| \le \cdots \le r^n|x_1 - x_0|.
\end{aligned}
$$

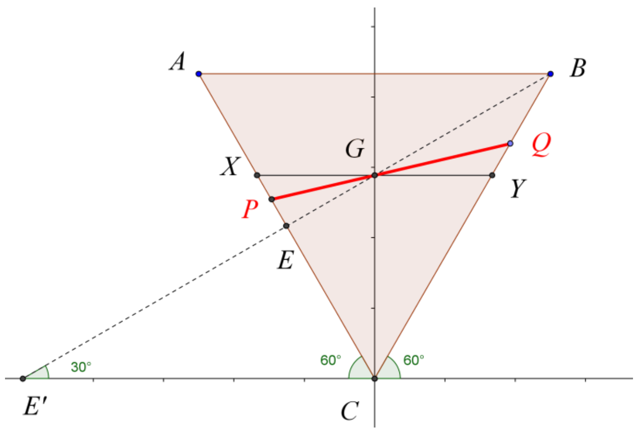
因此

$$
\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|\\
&\le r^{m-1}|x_1 - x_0| + r^{m-2}|x_1 - x_0| + \cdots + r^n|x_1 - x_0|\\
&= (r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + r^n)|x_1 - x_0|\\
&\le (r^n + r^{n+1} + \cdots)|x_1 - x_0| = \frac{r^n}{1-r}|x_1 - x_0|.
\end{aligned}
$$

證畢。

二、【參考解答】

如圖，建立直角坐標系(以 $\overline{AB}$ 的中垂線為 y 軸，過 C 點的水平線(平行 $\overline{AB}$)為 x 軸)。



X, Y 分別在 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 邊上且 $\overline{XY}$ 過 G 點平行 $\overline{AB}$. G：重心坐標為 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 連

$\overline{BG}$ 延長交 $\overline{AC}$ 於 E, 此時，$\overline{BE} \perp \overline{AC}$, 其延長線與 x 軸之夾角為 30°.

僅須再解說: 當 P 在 $\overline{XE}$, Q 在 $\overline{BY}$ 且 $\overline{PQ}$ 過 G 點時，$\frac{2}{3} \le \overline{PQ} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

理由如下:

$\overleftrightarrow{BC}$: $y = \sqrt{3}x$，$\overleftrightarrow{AC}$: $y = -\sqrt{3}x$

$\overline{BE}$ 的斜率為 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\overline{XY}$ 的斜率為 $\tan 0^\circ = 0$.

$\overline{PQ}$ 的斜率 $0 \le m \le \frac{\sqrt{3}}{3}$.

過 G 點且斜率 m 介於 0, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 之間的 $\overline{PQ}$ 直線方程式:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} + mx, \quad 0 \le m \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

依此求 Q 的坐標 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} + mx \end{cases}$ ：得

$$Q\left(\frac{\sqrt{3}}{3\left(\sqrt{3}-m\right)}, \frac{1}{\sqrt{3}-m}\right).$$

同理，由 P：$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} + mx \end{cases}$ 得

$$P\left(\frac{-\sqrt{3}}{3\left(\sqrt{3}+m\right)}, \frac{1}{\sqrt{3}+m}\right).$$

因此 $\overline{PQ}^2 = \frac{4\left(1+m^2\right)}{\left(3-m^2\right)^2}$，而此函數在 $0 \le m \le \frac{\sqrt{3}}{3}$ 為遞增函數。

得 $m = 0$ 時，$\overline{PQ}^2 = \frac{4}{9}$, $\overline{PQ} = \overline{XY} = \frac{2}{3}$ 為最小，而 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 時，$\overline{PQ}^2 = \frac{3}{4}$,

$\overline{PQ} = \overline{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 為最大。綜合得知 $\frac{2}{3} \le \overline{PQ} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

三、【參考解答】

首先可注意到

$$\frac{1}{a_{k+1}-a_k}-\frac{1}{a_{k+1}+a_k}=\frac{1}{a_{k+2}-a_{k+1}}.$$

此即

$$\frac{1}{a_{k+1}+a_k}=\frac{1}{a_{k+1}-a_k}-\frac{1}{a_{k+2}-a_{k+1}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}+a_k}=1-\frac{1}{a_{n+2}-a_{n+1}}.$$

只要可證出 $a_{k+2}-a_{k+1}<2(a_{k+1}-a_k)$ 對所有正整數 k 均成立，本題的不等式就得證。我們利用數學歸納法證明 $a_k<a_{k+1}<3a_k$ ，對所有 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 均成立。這是因為：如果已知 $a_k<a_{k+1}<3a_k$ ，則

$$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{(a_{k+1}+a_k)(a_{k+1}-a_k)}{2a_k}>0,$$

且

$$a_{k+2}-3a_{k+1}=\frac{a_{k+1}(a_{k+1}-3a_k)-a_ka_{k+1}-a_k^2}{2a_k}<0.$$

所以

$$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{(a_{k+1}+a_k)(a_{k+1}-a_k)}{2a_k}<2(a_{k+1}-a_k).$$