102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）參考解答

一、【參考解答】

將 $x=1$ 代入

$$x\cdot f(xy)+f(-y)=x\cdot f(x) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

得

$$f(y)+f(-y)=f(1).$$

令 $f(1)=a$ ，就有

$$f(-y)=a-f(y) \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

將 $y=-1$ 代入 (1) 式可得

$$x\cdot f(-x)+f(1)=x\cdot f(x).$$

利用 (2) 式可轉換為

$$x(a-f(x))+a=x\cdot f(x).$$

解得 $f(x)=\dfrac{a(x+1)}{2x}=\dfrac{a}{2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right).$

最後，我們必須檢查：對所有的實數 c ，函數 $f(x)=c(1+1/x)$ 是否為 (1) 式的解。代入得

$$\begin{aligned} x\cdot f(xy)+f(-y) &= x\cdot c\left(1+\frac{1}{xy}\right)+c\left(1+\frac{1}{-y}\right)=c\left(x+\frac{1}{y}+1-\frac{1}{y}\right) \\ &= c(x+1)=x\cdot c\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\cdot f(x). \end{aligned}$$

證畢。

二、【參考解答】

令 $\sqrt[5]{x-1}=1+y,\ \sqrt[5]{153-x}=1-y$，則

$$\begin{aligned}(1+y)^5+(1-y)^5&=(x-1)+(153-x)=152\\ y^4+2y^2-15&=0\\ y^2&=3\ \text{或}\ -5\,(\text{不合})\\ y&=\pm\sqrt{3}.\end{aligned}$$

將 $y=\pm\sqrt{3}$ 代入 $\sqrt[5]{x-1}=1+y$, 得

$$\begin{aligned}(x-1)&=(1\pm\sqrt{3})^5=76\pm 44\sqrt{3},\\ x&=77\pm 44\sqrt{3}.\end{aligned}$$

三、【參考解答】

設 $f(x)=0$ 有一整數根 α，且設

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \cdots+a_n,\qquad a_i\in Z$$

根據假設條件知道 $\alpha\,|\,a_n$，亦即 $\alpha\,|\,f(0)$。又因為 $f(0)$ 為奇數，則 α 亦為奇數。另一方面，$f(1)$ 為奇數，則有

$$f(1)-f(\alpha)=f(1)-0=f(1)$$

因此，$f(1)-f(\alpha)$ 亦為奇數。但是，我們知道

$$\begin{aligned}&f(1)-f(\alpha)\\ &=(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n)\\ &=-\left[a_0(\alpha^n-1)+a_1(\alpha^{n-1}-1)+\cdots+a_{n\text{-}1}(\alpha-1)\right].\end{aligned}$$

由此可知 $(\alpha-1)\,|\,f(1)-f(\alpha)$，故 $\alpha-1$ 亦為奇數，此與 α 為奇數矛盾，故得證。