

102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究試題 (一)

注意事項：

- (1) 三題中僅可以選兩題作答，並請註明題號。
- (2) 時間分配：2 小時 (8:00~10:00)。
- (3) 配分：每題皆為 7 分。
- (4) 不可使用計算器。

一、令 $f(x)$ 為定義在非零實數上的實數值函數。找出所有滿足下列條件的

$f(x)$ ：對所有 $x \neq 0, y \neq 0$,

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

二、求 $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt[5]{153-x} = 2$ 的所有實數解 x 。

三、設 $f(x)$ 為整係數多項式，已知 $f(0), f(1)$ 均為奇數。

試證： $f(x) = 0$ 無整數根。