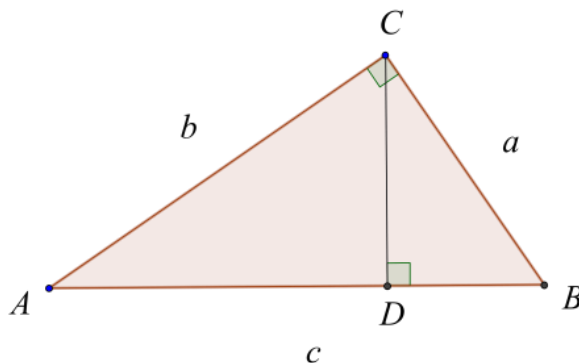


102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試解答

一、【參考解答】

(1) 如圖，



因 $\triangle ABC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則由直角三角形母子相似性質知

$$\triangle ADC \sim \triangle ACB, \triangle BDC \sim \triangle BCA,$$

而其相似對應邊之比分別為 $\frac{b}{c}$ 與 $\frac{a}{c}$ ，故

$$r_a = \frac{a}{c}r_c, \quad r_b = \frac{b}{c}r_c.$$

$$\text{得 } r_a + r_b + r_c = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)r_c = \frac{a+b+c}{c} \cdot r_c.$$

$$\text{再由 } c \cdot h_c = 2\triangle ABC = r_c \cdot (a+b+c) \text{ 得知 } \frac{a+b+c}{c} \cdot r_c = h_c.$$

如上得到(1) $r_a + r_b + r_c = h_c$.

(2) 另設

$$\begin{cases} \frac{a}{c}r = p \\ \frac{b}{c}r = q \\ a+b-c = 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2r^2}{p+q-r} \\ b = \frac{2qr}{p+q-r} \\ a = \frac{2pr}{p+q-r} \end{cases}$$

由 p, q, r 之條件知 $p+q>r$, a, b, c 均為正數且滿足 $a^2+b^2=c^2$, 其決定的直角三角形滿足三內切圓半徑 $r_a=p$, $r_b=q$ 及 $r_c=r$.

二、【參考解答】

設 P 為三角形內部一點。過 P 點畫分別平行於兩座標軸的兩垂直線 l, l' , 交 T 於 A, B, C, D 四點。因為三矩形完全蓋住 T 的三邊, 因此由鴿籠原理至少有一個矩形蓋住 A, B, C, D 中的兩個點。顯然這個矩形也蓋住了 P 。故得證。