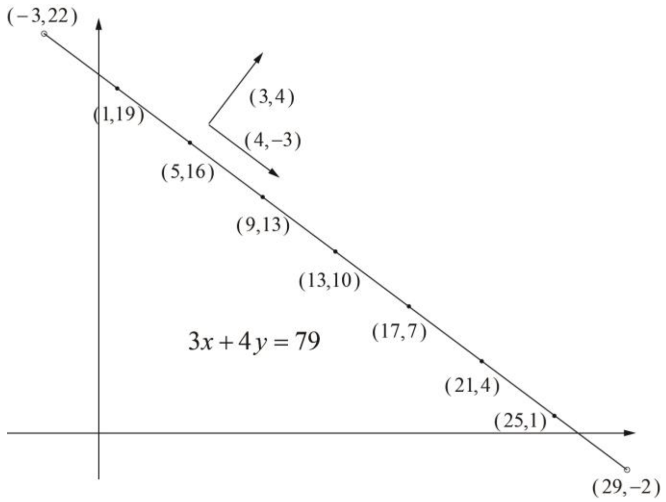
7 笛卡爾之夢……直線與線性函數

「蹴鞠」是唐宋時代一種類似今日足球的運動，在宮廷裡很是盛行（宋徽宗是當時的蹴鞠高手）。當時規定，踢進一球得a分；罰進一球得b分（那時$a>b$）。從出土的成績紀錄表上發現：2 分及 13 分從來沒有出現過；而且 14 分至 100 分皆曾出現過。你是否可以據此推得：當時的蹴鞠運動，踢進一球及罰進一球的分數是多少呢？

蹴鞠與直線的關係

『直線』與『圓 』可以說是中學數學課程的核心，幾何學裡的重要份子，直線代表處處平直的線，圓則是彎曲均勻的曲線。直線不僅在幾何學裡扮演要角，在代數學領域也有它的一席之地，線性函數就是直線在代數學上的代言人。從直線在座標平面上誕生的眾多名詞，如『直線方程式』、『截距』、『斜率』、『法向量』、『方向向量』、『參數方程式』、……等。由此可見直線是交融幾何與代數的重要橋樑。

就以直線$3x+4y=79$為例，畫圖如下：



將這直線的重要數據製表如下：

直線方程式	$3x+4y=79$
通過的相鄰格子點	$(5,16)$ 與 $(9,13)$
截距	$79/3$(X截距)，$79/4$(Y截距)
斜率	$-3/4$
法向量	$(3,\ 4)$
方向向量	$(4,-3)$
參數方程式	$\begin{cases} x=5+4t, \\ y=16-3t. \end{cases}$

7.1 線上的格子點……線性的丟番圖問題

所謂的『丟番圖問題』就是「給定一個方程式，求這方程式上的 X 與 Y 座標同為整數的解之問題」，習慣上稱這種解為『格子點』解。因此，直線上的丟番圖問題就是在求直線方程式所通過的所有格子點。

例題 1　蘋果一顆 17 元，梨子一粒 19 元。小華各買了若干之後，總計 320 元。問：小華買幾顆蘋果、幾粒梨子？

【解】設小華買 x 顆蘋果、y 粒梨子。由題意得知：$17x+19y=320$，而且 x,y 是非負整數。將式子 $17x+19y=320$ 整理得到

$$x=\frac{320-19y}{17}=(18-y)+\frac{14-2y}{17}\Rightarrow(x,y)=(11,7)\text{ 是一組整數解。}$$

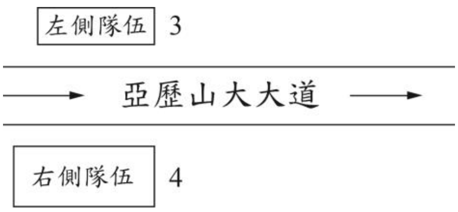
利用參數方程式得到

$$\begin{cases} x=11+19t, \\ y=7-17t. \end{cases}$$

由參數方程式得到：僅 $t=0$ 時，才會產生非負整數解。因此，小華買 11 顆蘋果、7 粒梨子。

例題 2　(亞歷山大的慶典)亞歷山大大帝為了顯示他的偉大，在開國紀念日的那一週，每天都把他所有的僕人分成兩個隊伍同時沿著亞歷山大大道遊行慶祝。其中一群僕人以每排三人的矩形隊伍沿著大道左側前進，另一群僕人則以每排四人的矩形隊伍沿著大道右側前進。亞歷山大並要求在慶典的七天裡，每天沿著亞歷山大大道左側遊行的人數必須不一樣；而每天沿著亞歷山大大道右側遊行的人數也不相同。

試問：亞歷山大的僕人至少有幾人？



【解】設至少需要僕人 n 人。由題意得知：$3x+4y=n$ 有至少有七組正整數解，其中 $3x$

與$4y$分別代表沿著亞歷山大大道左、右側遊行的人數。因為要求僕人最少，所以恰有七組正整數解的情形較符合。

直線$3x+4y=n$與X,Y軸相交於$(\frac{n}{3},0),(0,\frac{n}{4})$兩點，且在這兩點之間恰有七組正整數解。又相鄰兩組正整數解的距離為$\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$。因此，$6\times 5<(\frac{n}{3},0),(0,\frac{n}{4})$兩點的距離$\leq 8\times 5$，即

$$6\cdot 5<\sqrt{(\frac{n}{3}-0)^2+(0-\frac{n}{4})^2}\leq 8\cdot 5\Rightarrow 72<n\leq 96.$$

當$n=73,74,75,76,77,78$時，正整數解皆為 6 組，當$n=79$時，如前言的圖所示，正整數解有 7 組。因此，至少需 79 位僕人方可達成亞歷山大大帝的要求。

7.2 直線與斜率

斜率是用來刻畫直線的代數計量。「互相垂直兩直線的斜率相乘為-1」這們簡單的一句數學用語，道盡了幾何與代數間不可分割的親密關係。

例題 3　座標平面上有一個正方形，其中一條對角線的斜率為 9。試求

(1) 另一條對角線的斜率。

(2) 此正方形四邊所在直線的斜率。

【解】關於(1)的求法：因為兩條對角線互相垂直，所以斜率的乘積為-1。因此另一條對角線的斜率為$-\frac{1}{9}$。

關於(2)的求法：不妨設正方形為$ABCD$，兩對角線相交於原點$O(0,0)$，且直線AO,BO的斜率分別為$9,-\frac{1}{9}$。因為$AO=BO$，所以可以令$A=(1,9),B=(-9,1)$。此時直線AB的斜率為

$$\frac{9-1}{1-(-9)}=\frac{4}{5}.$$

因為直線 CD 與直線 AB 垂直，所以直線 CD 的斜率為 $-\frac{5}{4}$。所以正方形四邊所在直線的斜率不是 $\frac{4}{5}$ 就是 $-\frac{5}{4}$。

7.3 線性函數與線性規劃

線性函數可以說是將數學問題代數化之後，所碰到最簡單的情形。在這節與下一節裡，我們提出一些與線性函數有關的應用問題或數學建模問題。

例題 4　一家庭（父親、母親和幾個孩子們）去阿里山旅遊，甲旅行社說：「如果父親買全票一張，其餘人可享受半票優待」；乙旅行社說：「家庭旅行算團體票，按原價的六五優惠」。這兩家旅行社的原價是一樣的，試就家庭裡不同的孩子數，討論哪家旅行社較優惠。

【解】假設這家庭有 a 個小孩子，甲、乙旅行社的原價是每人 x 元。

甲旅行社需

$$x+(1+a)\times\frac{x}{2}\text{ 元；}$$

乙旅行社需

$$(2+a)\times\frac{65x}{100}\text{ 元。}$$

若甲旅行社較乙旅行社便宜，則

$$x+(1+a)\times\frac{x}{2}\le(2+a)\times\frac{65x}{100}\Rightarrow\frac{3}{2}+\frac{a}{2}\le\frac{13}{10}+\frac{13a}{20}\Rightarrow a\ge\frac{4}{3}.$$

答：當小孩子數超過（含）2 人時，選擇甲旅行社較划算；在 1 個（含）小孩子時選擇乙旅行社較划算。

例題 5　交叉路口的「閃黃燈秒數」是可以利用數學模式來推導的，最常用的公式是：在速度限制為每小時 v 公里的馬路上的交叉路口的「閃黃燈秒數」$f(v)$（秒）定義為

$$f(v)=\frac{v}{a}+\frac{b}{v}+1,$$

正實數a,b由該路面的摩擦係數與路口寬度來決定。某都市的一則交叉路口一直根據這個公式來定「閃黃燈秒數」。幾年前，當該路段的速度限制為每小時 60 公里時，「閃黃燈秒數」定為 4 秒；最近將該路段的速度限制改為每小時 40 公里，「閃黃燈秒數」亦修正為 3.5 秒。

(1) 試求a與b的值。

(2) 後來經該市市民反應，「速度限制改為每小時 40 公里」太慢，也不合情理，應該調為每小時 40 公里才適當。若市政府採取市民們的建議，那「閃黃燈秒數」應修正為幾秒。

【解】關於(1)：由題意得到 $f(60)=4, f(40)=3.5$，列出聯立方程式為

$$\begin{cases}\dfrac{60}{a}+\dfrac{b}{60}+1=4\\ \dfrac{40}{a}+\dfrac{b}{40}+1=3.5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3600}{a}+b=180\\ \dfrac{1600}{a}+b=100\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=25;\\ b=36.\end{cases}$$

關於(2)：將$v=50$代數函數得到

$$f(50)=\frac{50}{25}+\frac{36}{50}+1=3.72\,(秒)。$$

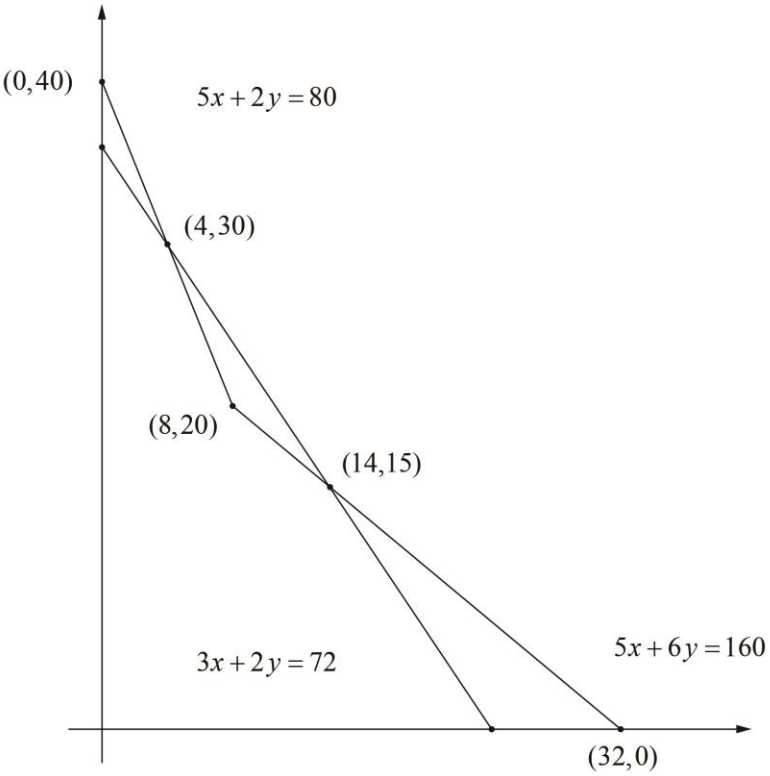
例題 6　某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：每花 10 萬元在報章雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點，知名度指數 10 點；反之，若是在電台上，同樣花 10 萬元替歌手打廣告，則可以提升歌手的形象指數 6 點，知名度指數 4 點。

根據市場調查發現成為名歌星的形象指數至少 160 點，知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數（形象指數與知名度指數的和）至少 360 點。試問：歌唱訓練班要讓一位新歌手（假設其形象指數與知名度指數皆為 0）成為名歌星應該花多少廣告費？這些廣告費報章雜誌與電台應各分配多少，效果最好。　（91 年數學乙）

【解】設歌唱訓練班花$10x$萬元替歌手打報章雜誌廣告，花$10y$萬元替歌手打電台廣告，本問題是在求目標函數$10x+10y$的最小值。欲使歌手成為明星必須要滿足

$$\begin{cases}5x+6y\geq 160\\10x+4y\geq 160\\15x+10y\geq 360\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+6y\geq 160,\\5x+2y\geq 80,\\3x+2y\geq 72.\end{cases}$$

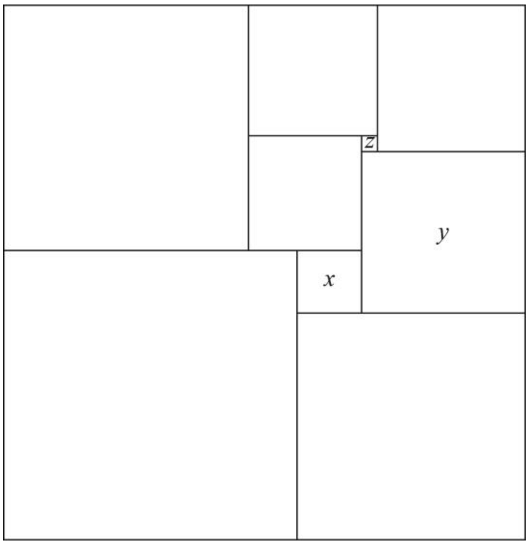
繪上述不等式的區域為（右半區域）



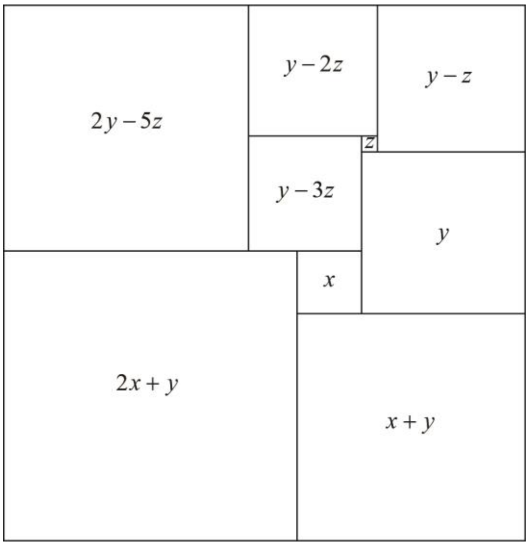
因為目標函數$10x+10y$的最小值發生在 (14,15)，所以訓練所應該花 140 萬元在報章雜誌與 150 萬元在電台上替歌手打廣告，才是最划算。共需花費 290 萬元。

7.4 直線與線性函數的妙用

例題 7　如下圖，一個大正方形分割成 9 個小正方形，其中x,y,z代表所在小正方形的邊長。求$x:y:z$的值。



【解】將其餘 6 個小正方形的邊長，以 x,y,z 表示在小正方形的中央。



現在考慮大正方形的邊長：由「底邊邊長＝最上邊邊長」及「左邊邊長＝右邊邊長」得到式子

$$\begin{cases}(2x+y)+(x+y)=(2y-5z)+(y-2z)+(y-z)\\(2y-5z)+(2x+y)=(y-z)+y+(x+y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-2y+8z=0\\x-4z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=4z,\\y=10z.\end{cases}$$

因此 $x:y:z=4:10:1$。

定理 7.1 設 p,q,r 是三個滿足

$$0 < p,q,r < 1$$

的實數。證明： $pq + qr + rp - 2pqr < 1.$

【證明】令直線方程式為 $y = f(x) = (p+q-2pq)x + pq - 1$（將 p,q 視為固定的實數）。將 $x = 0,1$ 代入，得到

$$f(0) = pq - 1 < 0;\ \ f(1) = p + q - pq - 1 = -(p-1)(q-1) < 0,$$

所以此直線在 $[0,1]$ 區間的值恆為負數，因此

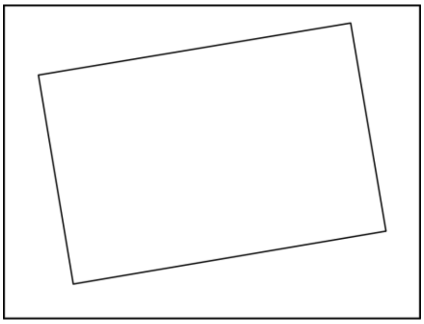
$$f\left(r\right) = pq + qr + rp - 2pqr - 1 < 0.$$

得證。

定理 7.2 如果一個矩行（長×寬 $= l_2 \times w_2$）可以擺放在另一個矩形（$l_1 \times w_1$）內（如下圖），那麼不等式

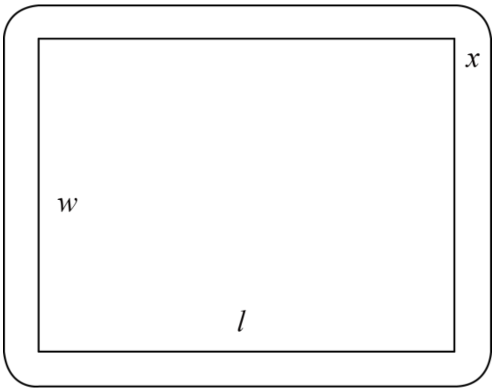
$$l_2 + w_2 \le l_1 + w_1$$

必須成立。



【證明】將 $l \times w$ 的矩形，向外延伸 x 單位長度（如下圖所示，四個角落分別以四分之一圓延伸），則所得到的形狀之面積為

$$lw + 2(l+w)x + \pi x^2.$$



如果依樣畫葫蘆分別對矩行$l_1 \times w_1$及$l_2 \times w_2$做同樣的延伸。顯然的，小矩形$l_2 \times w_2$延伸後的圖形必須落在大矩形$l_1 \times w_1$延伸後的圖形內部，因此得到如下的面積不等式

$$\begin{aligned} l_2 w_2 + 2(l_2 + w_2)x + \pi x^2 &\le l_1 w_1 + 2(l_1 + w_1)x + \pi x^2 \\ &\Rightarrow 2(l_1 + w_1 - l_2 - w_2)x + (l_1 w_1 - l_2 w_2) \ge 0. \end{aligned}$$

因為線性函數$y = f(x) = 2(l_1 + w_1 - l_2 - w_2)x + (l_1 w_1 - l_2 w_2)$在$x \ge 0$時，恆有$f(x) \ge 0$，所以線性函數的斜率$2(l_1 + w_1 - l_2 - w_2) \ge 0$，即

$$l_1 + w_1 \ge l_2 + w_2,$$

得證。

【註】利用線性函數來解決這問題有點牛刀小用。事實上，採取「三角形兩邊之和大於第三邊」的原理就足以解此題。但是將平面的長方形推廣到立體上的長方體實時，就需要較強的代數刻畫才有辦法完成。這與二次函數的開口相關，留待以後論述。

習題 1　座標平面上有一個正五邊形，它的五條對角線的斜率分別為

$$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.$$

試求此正五邊形的五邊所在直線之斜率為何？（用符號m_1, m_2, m_3, m_4, m_5表示）

習題 2　一位海盜欲將三件珠寶埋藏在一個島上的三個地方，海盜就以島上的一棵大王椰子樹為中心，由大王椰子樹向東走 12 步埋他的第一件珠寶；由大王椰子樹向

東走 4 步，再往北走a步埋他的第二件珠寶；最後由大王椰子樹向東走a步，再往南走 8 步埋他的第三件珠寶。事隔多年之後，海盜僅記得$a>0$及埋藏珠寶的三個地方在同一直線上。那麼$a=$________。（88 年學科）

習題 3 數學兼哲學家伽利略，於公元 1632 年出版《對話錄》一書觸怒教廷，在他 70 歲時，接受宗教法庭審判且於該年被判終身監禁。出版《對話錄》一書到在獄中過世是伽利略人生中最灰暗的 10 年。年輕的伽利略發明十倍率的望遠鏡，並在隔年就發現木星的歐羅巴衛星。發現衛星到接受審判剛好是他被監禁時間的三倍。事實上，發明望遠鏡到出版《對話錄》算是伽利略的黃金歲月，這段時間正好是他發現衛星時年齡的一半。試問：伽利略在哪一年發現歐羅巴衛星？

習題 4 在座標平面上，頂點是格子點的三角形之面積可以由『三角形邊上（含三頂點）的格子點數p』及『三角形內部（不含邊上）的格子點數q』這兩個變數的線性函數來描述，這是有名的『皮克定理』。皮克定理告訴我們：這樣的三角形的面積為

$$ap+bq-1,$$

a與b是兩個固定的常數。

(1) 試以頂點為(0,0), (1,0), (0,1)及頂點為(0,0), (2,0), (1,2)的三角形作例子，求出常數a,b 的值。

(2) 試求以(0,0), (2,3), (3, 5)為頂點的三角形面積。

(3) 如果$ABCD$是座標平面上的一個正方形，其中A,B,C,D都是格子點，但邊上與內部都沒有格子點。試求此正方形的面積及推論「直線AB不是平行x軸，就是平行y軸」。

(4) 問：是否可以在座標平面上選定三個格子點A,B,C使得三角形ABC是正三角形。

習題 5　「斜率相乘為 -1」是刻畫「直線互相垂直」的最好代數公式。如果兩圓相交，在交點對兩圓所作的切線互相垂直，就稱此兩圓正交或互相垂直。可否刻劃兩圓互相垂直的代數公式（用兩圓半徑 R,r 與兩圓圓心距離 d 來描述）？

習題 6　利用「三角形兩邊之和大於第三邊」的原理重證定理 7.2（或者其它證法亦可）。

習題 7　幻方鐵板上每行均由六個數字排列，組成方陣，不論縱行或橫行，或對角線上的數字，相加之和都是 111。這個蘊含著數學原理的六六幻方（魔方陣），在古代被視為奇妙的神秘之物。人們把它鄭重地裝進石函，埋入房基中，用作鎮宅和防災避邪的吉祥物。今幻方鐵板中有八個位置的數字已經無法辨識，你能幫史學家修補好這珍貴的元代幻方鐵板嗎？

28	4	3	31	35	10	元
36			24	11	1	代
7		12		22	30	幻
8				16	29	方
5	20	15	14	25	32	鐵
27	33	34	6	2	9	板

習題 8　克莉絲汀所居住的州所得稅之徵收辦法如下：年所得 28000 美元（含）以下部分課以 $p\%$ 的稅，超出 28000 美元部分課以 $(p+2)\%$ 的稅。克莉絲汀發現他所付出的州所得稅等於她年所得的 $(p+0.25)\%$。試問她的全年所得是多少？

習題 9　香檳酒中二氧化碳含量的多寡是影響開瓶時發出清脆悅耳響聲的關鍵因素。物理學上的『亨利定律』說：在固定溫度之下，香檳酒瓶內的氣體壓力（又稱表壓）與香檳酒中的二氧化碳含量會成直線關係。下表是某種香檳酒在 15℃時測得的「表壓」與「二氧化碳含量」的資料：

表壓 (kg / cm^2)	每100 ml 香檳酒的二氧化碳含量 (公克)
0.4	0.150
1.0	1.225

(1) 在 15℃，若表壓為 x kg/cm^2 時，每 100 ml 香檳酒的二氧化碳含量有 y 公克，則求 x 與 y 的關係。

(2) 在 15℃之下，每 100 ml 香檳酒的二氧化碳含量有 0.35 公克時，算是符合標準的香檳酒。試問：應該讓表壓為多少時，才符合這標準。

笛卡爾之夢……直線與線性函數的習題解答

習題 1

因為正五邊形的每邊恰與一條對角線平行，所以五邊所在的直線之斜率仍為

$$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.$$

習題 2

令椰子樹位置為原點 $(0,0)$，正東為 x 軸，正北為 y 軸。依題意：珠寶一的位置為$(12,0)$，珠寶二的位置為 $(4,a)$ ，珠寶三的位置為 $(a,-8)$ 。因為三點共線，所以任兩點的斜率相等，即

$$\frac{0-a}{12-4}=\frac{0-(-8)}{12-a} \Rightarrow a^2-12a-64=0.$$

因此 $(a-16)(a+4)=0$ ，即 $a=16$ 或 -4（不合）。

習題 3

設伽利略於公元 x 年接受審判，而在公元 a 年發現衛星。那麼

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{1642-x}=\dfrac{3}{1} \\ 1632-(a-1)=\dfrac{70-(x-a)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=a+4926 \\ x=3a-3196 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1634, \\ a=1610. \end{cases}$$

因此伽利略在公元 1610 年發現歐羅巴衛星。

習題 4

(1) 以頂點為(0,0), (1,0), (0,1)的三角形作例子時， $p=3, q=0$ ，面積為 $\frac{1}{2}$ 。代入公式得

$\frac{1}{2}=3a-1$ ，所以 $a=\frac{1}{2}$ 。

又以頂點為(0,0), (2,0), (1,2)的三角形作例子時，$p=4, q=1$，面積為 2。代入公式得 $2=\frac{1}{2}\cdot 4+b\cdot 1-1$，所以 $b=1$。所以皮克面積公式為

$$\frac{1}{2}p+q-1.$$

(2) 此時 $p=3, q=0$。代入(1)的面積公式得到面積為

$$\frac{1}{2}\times 3+0-1=\frac{1}{2}.$$

(3) 考慮三角形 ABC，依題意知道 $p=3, q=0$，所以其面積為 $\frac{1}{2}\times 3+0-1=\frac{1}{2}$。故正方形 $ABCD$ 的面積為 1，即邊長 $AB=1$。利用畢氏定理可以知道：AB 一定平行 x 軸或 y 軸（否則其長度不可能為 1）。

(4) 如果有這樣的正三角形，那麼因為頂點是格子點的關係，邊長^{2}一定是正整數。此正三角形的面積

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 邊長^2$$

為無理數。

但是，由(1)的面積公式

$$\frac{1}{2}p+q-1$$

知道：此正三角形的面積為分數（有理數）。

上述兩件事情互相矛盾，故這樣的正三角形是不存在的。

習題 5

$d^2=R^2+r^2$。

習題 6

將較大的矩形縮小成剛好與小矩形四個頂點相碰（即縮到不能再縮的情形）。此時的大矩形剛好分割成小矩形與四個直角三角形。針對這四個直角三角形採取三角不等式，馬

上得到欲證的不等式。

習題 7

設定未知數a,b,c,d,e,f,g如下圖：

28	4	3	31	35	10	元
36	a	b	24	11	1	代
7	c	12	d	22	30	幻
8	e	f	g	16	29	方
5	20	15	14	25	32	鐵
27	33	34	6	2	9	板

可以列式為

$$
\begin{aligned}
&(1) && a+b=39;\\
&(2) && c+d=40;\\
&(3) && e+f+g=58;\\
&(4) && a+c+e=54;\\
&(5) && b+f=47;\\
&(6) && d+g=36;\\
&(7) && d+f=43;\\
&(8) && a+g=37.
\end{aligned}
$$

由(5)+(6)得到

$$b+f+d+g=83.$$

將上式$-(7)-(8)$得到

$$b-a=3.$$

將此式與(1)解得$a=18,b=21$。由(5), (8)知道$f=26,g=19$。再由 (6), (2), (3)知道$d=17,c=23,e=13$ 。

習題 8

設克莉絲汀全年所得為$28000+x$美元。克莉絲汀需繳的稅為

$$
\begin{aligned}
&28000\times p\% + x\times(p+2)\% = (28000+x)\times(p+0.25)\% \\
&\quad\Rightarrow (28000+x)\times p\% + 0.02x = (28000+x)\times p\% + (28000+x)\times 0.0025 \\
&\quad\Rightarrow 0.02x = 70 + 0.0025x \\
&\quad\Rightarrow x = 4000.
\end{aligned}
$$

因此，克莉絲汀的所得為 32000 元。

習題 9

關於(1)：由『亨利定律』可設 $y = mx + a$。將表中的值代入解得 $m = \frac{1}{8}, a = \frac{1}{10}$。

關於(2)：將方程式 $y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{10}$ 中的 y 代 0.35 得到 $x = 2$。所以當表壓為 2kg/cm^2 時，每 100 ml 香檳酒的二氧化碳含量有 0.35 公克。