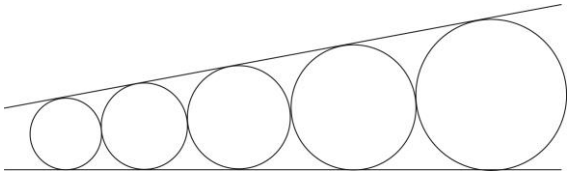
6 尋找等比數列的深度之旅



圓半徑成等比數列

等比數列最早出現在古埃及的《萊因德紙草書》上，該書第七十九題畫有一幅帶有數字的圖，在 7、49、343、2401、16807 數字邊分別畫著人、貓、鼠、大麥和量器。只有畫作，卻沒有任何文字說明，因此成了一道流傳的數謎。後人解出了這道數謎，認為圖案要表達的意思是說「有 7 個人，每人畜養 7 隻貓，每隻貓捕食 7 隻老鼠，而每隻老鼠先前偷食了 7 株麥穗，每株穗麥能裝滿 7 個量杯」。

而在古中國的《孫子算經》也出現一道類似問題「今有出門望見九堤、堤有九木、木有九枝、枝有九巢、巢有九禽、禽有九雛、雛有九毛、毛有九色，問各有幾何？」，就是一道以 9 為首項，9 為公比的等比數列問題。

意大利數學家斐波那契在《計算書》中，也有一道類似的題目「今有 7 位老婦同往羅馬，每人有 7 頭騾，每頭騾背上有 7 袋，每袋裝有 7 個麵包，每個麵包有 7 把小刀隨之，問以上列舉之物各有多少？」

上文中列舉的等比數列是虛擬情境產生的，而在我們的日常生活中，等比數列是否處處可見，信手拈來，俯拾即是呢？複利問題就是一則大家耳熟能詳的例子：若年初存入 1 元，以年利率 0.05 複利計算，那麼第一年年底，第二年年底，第三年年底，…，第 n 年年底的本利和依次為

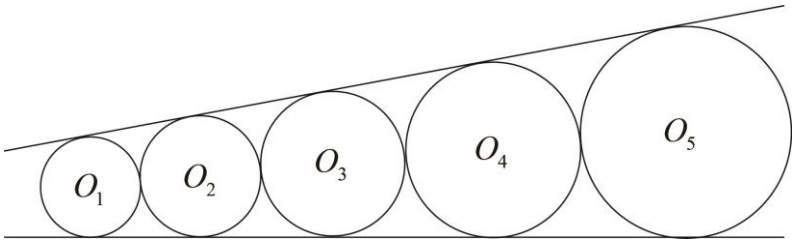
$$1\times(1+0.05)^1,1\times(1+0.05)^2,1\times(1+0.05)^3,\cdots,1\times(1+0.05)^n.$$

這數列就是等比數列。除複利問題外，日常生活中是否還可見到等比數列的蹤跡呢？現在就讓我們來一趟尋找等比數列的深度之旅吧！

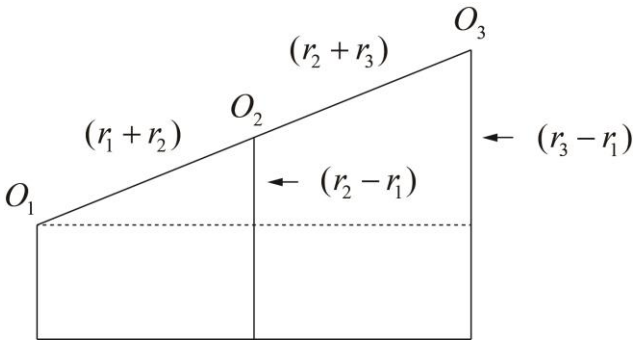
6.1 幾何世界裡的等比數列

幾何圖形容易產生相似的情形，這就會製造出比例式，等比數列就油然而生！

例題 1　證明下圖中圓半徑構成等比數列



【解】考慮前三個圓之關係（令其半徑分別為 r_1, r_2, r_3），繪製如下圖：

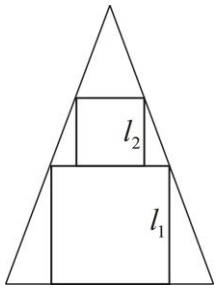


利用相似性質得到

$$\frac{r_2-r_1}{r_3-r_1}=\frac{r_1+r_2}{r_1+2r_2+r_3}\Rightarrow\frac{r_2}{r_1}=\frac{r_3}{r_2}.$$

因此，五圓的半徑成等比數列。

例題 2　如下圖：在一個高度為 h，底長為 a 的三角形內，畫一個正方形（如圖所示）。依序往上畫的都是正方形，且設其邊長分別為 $l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots$。



(1) 試求l_1。

(2) 證明：$\langle l_n \rangle$是一個等比數列。

【解】由下列的輔助長度及相似性質得到：

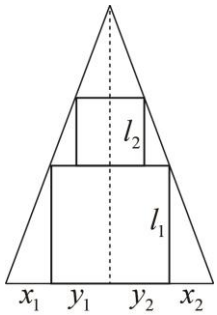
$$\frac{l_1}{h}=\frac{x_1}{x_1+y_1}=\frac{x_2}{x_2+y_2}.$$

由此等式推得

$$\frac{l_1}{h}=\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+y_1+y_2}=\frac{a-l_1}{a}\Rightarrow l_1\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{h}\right)=1. \tag{6.1}$$

因此

$$l_1=\frac{ah}{a+h}.$$



現在證明$\langle l_n \rangle$是一個等比數列：將式子 (6.1) 應用到與邊長l_{n+1}的正方形相接的三角形（此三角形與原三角形相似）上：

$$l_{n+1}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{h\cdot\frac{l_n}{a}}\right)=1\Rightarrow\frac{l_{n+1}}{l_n}=\frac{h}{a+h}.$$

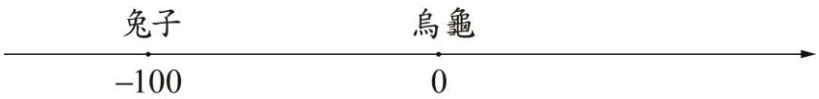
因此$\langle l_n \rangle$是一個公比為

$$\frac{h}{a+h}$$

等比數列。

6.2 寓言故事中的等比數列

例題 3　在一條筆直的數線上，烏龜與兔子正如火如荼地上演著龜兔賽跑的遊戲。烏龜的起跑點就在原點的位置，而兔子站在烏龜後方 100 公尺的地方。烏龜的速度是每分鐘 1 公尺；而兔子每分鐘 50 公尺。規定數列$\langle d_n \rangle$及$\langle a_n \rangle$如下：$d_0 = 0$（烏龜的起跑點座標），d_1為兔子跑到數線上座標為$d_0 = 0$位置時，烏龜所在位置的座標，d_2為兔子跑到數線上座標為d_1位置時，烏龜所在位置的座標，依此類推，d_{n+1}為兔子跑到數線上座標為d_n位置時，烏龜所在位置的座標。定義$a_n = d_n - d_{n-1}\ (n \geq 1)$。



問：$\langle a_n \rangle$是否為等比數列？兔子可以追趕上烏龜嗎？

【解】觀察得到

$$d_0 = 0,\ d_1 = \frac{100}{50} \times 1 = 2,\ a_1 = d_1 - d_0 = 2,$$

及

$$d_{n+1} = d_n + \frac{d_n - d_{n-1}}{50} \times 1 \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot 50^{-1}.$$

因此

$$a_n = a_1 \cdot 50^{-(n-1)} = 2 \times (\frac{1}{50})^{n-1},$$

即$\langle a_n \rangle$是首項為 2，公比是$\frac{1}{50}$的等比數列。

事實上，兔子在數線座標為

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \frac{2}{1 - \frac{1}{50}} = \frac{100}{49}$$

時，剛好趕上烏龜，之後就領先烏龜了。

6.3 數學家創造的等比數列

例題 4　有人問過匈牙利裔美國數學家馮・諾依曼如下的問題：

兩列火車在一條軌道上對開。最初相距 100 公里，而火車的速率都是每小時 50 公里。假設有隻蒼蠅，飛行速率是每小時 75 公里。從一列火車頭往前飛，在到達另一列火車的火車頭之後立刻折返飛行，再碰到原先的火車頭之後又立刻折返飛行。問火車相撞的時候，這隻蒼蠅來來回回，總共飛了多遠？

【解一】（數學家的自以為是）數學奇才，電腦之父的馮・諾依曼利用無窮等比級數的求和方法來計算。他發現蒼蠅前幾趟的飛行距離分別為

$$60, 12, 2.4, 0.48, \cdots.$$

蒼蠅來來回回，總共飛了

$$\frac{60}{1-\frac{1}{5}} = 75$$

公里。馮・諾依曼的直覺告訴他：這是等比數列，只需考慮前兩項，再佐以無窮等比級數的公式即可。問題是：如何確認或者證明這個數列就是等比數列呢？

【解二】（外行人的詮釋）兩列火車於一個小時之後相撞。因此蒼蠅以每小時 75 公里的速率來來回回，總共飛了

$$75 \times 1 = 75$$

公里。

6.4　從數列誕生的等比數列

例題 5　數列$\langle a_n \rangle$與$\langle b_n \rangle$定義為

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ b_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

數列$\langle a_n + b_n\sqrt{2} \rangle$是等比數列。

【解】由

$$\frac{a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}}{a_n+b_n\sqrt{2}}=\frac{3a_n+4b_n+(2a_n+3b_n)\sqrt{2}}{a_n+b_n\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$$

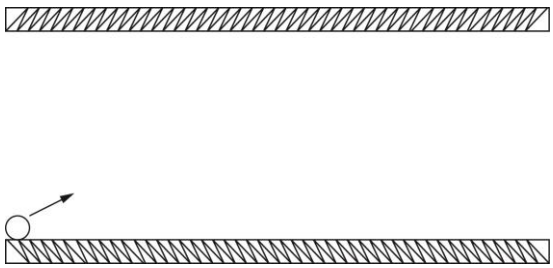
得證。

習題 1　在等比數列$\langle a_n\rangle$中，

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_4 &= 2-\sqrt{5} \\ a_{n+2} &= a_{n+1}+a_n, n\geq 1, \end{aligned}$$

則$\langle a_n\rangle$的公比為何？　　（87 年學科能力測驗）

習題 2　如下圖所示，上下兩條鐵板相距 12 公尺，上方的鐵板以每分鐘 1 公尺的速度向下運動，下方的鐵板以每分鐘 1 公尺的速度向上運動。左下方的小鐵球，以每分鐘 4 公尺的速度向方向角30°的方向等速運動。



今忽略不計小鐵球的半徑，令小鐵球出發到第一次碰著鐵板所走的路徑長度為l_0公尺，第一次碰著鐵板到第二次碰著鐵板所走的路徑長度為l_1公尺，…，依此類推。

(1) 求出l_0,l_1,l_2的值，並寫下l_n的一般公式。

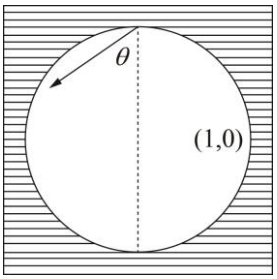
(2) 在兩塊鐵板相碰之前，小鐵球總共走了多長的路徑？

習題 3　下列所描述的數列$\langle a_n\rangle$，哪些是等比數列：

(1) 化學元素鈽 214 的半衰期約為 20 分鐘。今一礦物測量得到含有 10 公克的鈽 214。此礦物第 n 小時之後，鈽 214 的殘餘量為 a_n 公克。

(2) a_n 定義為 $a_1=1, a_2=\sqrt{2}, a_{n+2}=(\sqrt{2}-1)a_{n+1}+\sqrt{2}a_n, (n\geq 1)$。

(3) 右圖是把單位圓內部當成撞球台來使用，一粒質子從 (0,1)的點射出，射出角度剛好與虛線夾 θ 角。此質子第 n 次碰到單位圓的點之座標為 (x_n, y_n)，令複數 $a_n=x_n+iy_n$。



(4) 將一顆球由 100 公尺的高空自由落下，第一次落地反彈的最高點高度為 a_1 公尺，第二次落地反彈的最高點高度為 a_2 公尺，…，依此類推，第 n 次落地反彈的最高點高度為 a_n 公尺。

(5) 將一顆球讓它與地平面成 60° 的方向擲出，離手瞬間的速度為每秒 10 公尺。此球第一次落地前的最高高度為 a_1 公尺，第一次落地後至第二次落地前的最高高度為 a_2 公尺，…，依此類推，第 n 次落地後至第 $n+1$ 次落地前的最高高度為 a_n 公尺。

動手玩數學

在龜兔賽跑的問題中，烏龜的起跑點就在原點的位置，而兔子站在烏龜後方 s 公尺的地方。烏龜的速度是每分鐘 v_1 公尺；而兔子每分鐘 v_2 公尺。規定數列 $\langle d_n\rangle$ 及 $\langle a_n\rangle$ 如下：$d_0=0$（烏龜的起跑點座標），d_1 為兔子跑到數線上座標為 $d_0=0$ 位置時，烏龜所在位置的座標，d_2 為兔子跑到數線上座標為 d_1 位置時，烏龜所在位置的座標，依此類推，d_{n+1} 為兔子跑

到數線上座標為d_n位置時，烏龜所在位置的座標。定義$a_n = d_n - d_{n-1}\ (n \geq 1)$。證明：$\langle a_n \rangle$是等比數列，且在何條件之下，兔子可以追趕上烏龜嗎。

挑戰題

在蒼蠅飛行的問題中，設兩列火車相距d公里，他們的速率都是每小時w公里，蒼蠅的速率為每小時v公里（其中$w < v$）。設a_1代表蒼蠅起飛至第一次遇到火車時所飛行的距離，a_2代表蒼蠅第一次與第二次遇到火車時所飛行的距離，…，依此類推，a_n代表蒼蠅第$n-1$次與第n次遇到火車時所飛行的距離。證明：$\langle a_n \rangle$是等比數列，並寫下公比的公式。

無窮等比級數與齊諾的詭辯

在中國有龜兔賽跑的例子。巧合的，在西方也有齊諾創造出來的詭辯：古希臘哲學家齊諾利用希臘神話中的飛毛腿阿紀利去追趕前面的烏龜。如同龜兔賽跑的例子一樣，齊諾製造了「飛毛腿阿紀利永遠無法追過慢步的烏龜」這樣的矛盾。齊諾的另一個「箭射不出去」的詭辯就更絕了。他說一支箭要射到一個目標，它必須先飛過前一半的距離，但要飛過前一半的距離之前，又需先飛過前四分之一的距離，前八分之一的距離，…。但這種一半又一半的過程是永無止境的，於是他說這枝箭永遠無法離弓了。

這些例子都牽涉到公比介於-1與1之間的無窮等比級數。在古希臘時期，是沒有無限（窮）和這種概念的。再加上這些矛盾與詭辯，古希臘數學家拒絕做任何與無（窮）限和有關的研究，並把它們摒棄於數學論述之外。

尋找等比數列的深度之旅的習題解答

習題 1

設公比為 r 。由 $a_4 = a_3 + a_2, a_3 = a_2 + a_1 = a_2 + 1$ 得到

$$2-\sqrt{5} = a_4 = 2a_2 + 1 = 2r + 1 \Rightarrow r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

習題 2

(1)

$$l_0 = 16, l_1 = 16\times 3^{-1}, l_2 = 16\times 3^{-2}, \cdots, l_n = 16\times 3^{-n}.$$

(2)

$$6\times 4 = 24 \text{ 公尺。}$$

習題 3

關於(1)的答案： $a_n = 10\times(\frac{1}{8})^n$ 。

關於(2)的證明：將遞迴式子 $a_{n+2} = (\sqrt{2}-1)a_{n+1} + \sqrt{2}a_n$ 改寫為

$$a_{n+2} + a_{n+1} = \sqrt{2}\left(a_{n+1} + a_n\right).$$

利用此式子及 $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2}$ 得到

$$a_n + a_{n-1} = \sqrt{2}\left(a_{n-1} + a_{n-2}\right) = \cdots = \sqrt{2}^{n-2}\left(a_2 + a_1\right) = \sqrt{2}^{n-2}(\sqrt{2}+1).$$

有了這個式子之後，利用數學歸納法證明：

$$a_n = \sqrt{2}^{n-1}.$$

另一種作法是：將上述式子再改寫為

$$\left(a_n-\sqrt{2}^{n-1}\right)=(-1)\left(a_{n-1}-\sqrt{2}^{n-2}\right).$$

因此

$$\left(a_n-\sqrt{2}^{n-1}\right)=(-1)^{n-1}\left(a_1-\sqrt{2}^{0}\right)=0.$$

關於(3)的證明：設$\alpha=180^{\circ}-2\theta, r=\cos\alpha+i\sin\alpha$。那麼由隸美佛定理知道：

$$a_n=ir^n$$

是公比為r的等比數列。

關於(4),(5)：他們都是等比數列（證明需要一點物理知識）。

動手玩數學參考解答

由

$$a_1=\frac{s}{v_2}\cdot v_1=s\cdot\frac{v_1}{v_2}, a_2=\frac{a_1}{v_2}\cdot v_1=a_1\cdot\frac{v_1}{v_2},\cdots,a_{n+1}=\frac{a_n}{v_2}\cdot v_1=a_n\cdot\frac{v_1}{v_2}$$

得知$\langle a_n\rangle$是公比為$\dfrac{v_1}{v_2}$的等比數列。

挑戰題參考解答

蒼蠅第$n-1$次與第n次遇到火車期間，另一列火車前進的距離為

$$\frac{a_n}{v}\cdot w.$$

由此知道

$$a_{n+1}=\left(a_n-\frac{a_n}{v}w\right)\times\frac{v}{w+v}.$$

整理得到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{v-w}{v+w}.$$

因此，$\langle a_n \rangle$是公比為$\dfrac{(v-w)}{(v+w)}$的等比數列。