5 追尋等差數列的足跡

1	2	3	4	*5*	6	7	8
9	10	11	12	*13*	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	*29*	30	31	32
33	34	35	36	*37*	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	*53*	54	55	56
57	58	59	60	*61*	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	*101*	102	103	104
105	106	107	108	*109*	110	111	112
113	114	115	116	117	118	119	...

被 4 除餘 1 的質數表 [1]

在數列中，任何相鄰兩項，其後項減去前項所得的差都相等，這樣的數列叫做等差數列或算術數列。日常生活裡常談到的偶數“$2,4,6,\cdots$”、奇數“$1,3,5,\cdots$”，或者算術問題裡的 3 的倍數“$3,6,9,\cdots$”、被 4 除餘數為 1 的數“$1,5,9,\cdots$”……等都是等差數列。等差數列是很有規律且重要的數列，它經常出現在日常生活裡或算術問題中。他的規律性可由數線上的點一眼看出：

由這規律清楚看出，等差數列$\langle a_n\rangle$完全由首項a（即第一項a_1）與公差d（即相鄰兩項的差）來決定。所有與等差數列$\langle a_n\rangle$相關的量，都可以用a,d來描述。例如：$\langle a_n\rangle$的通項公式，即$a_n=a+(n-1)d$；而前n項的和$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$為

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

高斯快速回答老師的求和問題“$1+2+3+\cdots+100=5050$”就是等差數列$a=1,d=1$前 100 項的求和問題。高斯就憑藉著瞭解「前 100 項和的伎倆（公式）」的智慧，戰勝了老師施予他的苦力。

如果等差數列只有a_1,a_2,a_3三項，那麼把a_2稱為等差中項，而且此三項有“$2a_2=a_1+a_3$”的關係。我們經常將此三項表示為$a_1=a-d,a_2=a,a_3=a+d$。

[1] 「被 4 除，餘數為 1 的等差數列中有無窮多個是質數」是串聯等差數列與質數的完美

定理！串聯等差數列與質數的結果當然首推<u>歐基里德</u>在《幾何原本》中證明的「自然數中有無窮多個是質數（或者說：被 2 除，餘數為 1 的等差數列中有無窮多個是質數）」這個定理。事實上，數學家<u>狄利克雷</u>在 1837 年進一步證明：「被 $d(d \ge 2)$ 除，餘數為 a（a 與 d 互質）的等差數列中也會有無窮多個是質數。」

5.1 生活情境中的等差數列

例題 1　公元五世紀寫成的《張丘建算經》中的一則題目：「有一女子不善織布，逐日所織布按數遞減，已知第一日織 5 尺，最後一日織 1 尺，共織了 30 日，問共織布多少？」請解決這問題。

【解】由題意知道每日所織的布成等差數列，設第 n 日織布 a_n 尺。由題意知道

$a_1 = 5, a_{30} = a_1 + 29d = 1$，因此 $d = \frac{-4}{29}$。共織布 S_{30} 尺，利用公式得到

$$S_{30} = 30 \cdot 5 + \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot (\frac{-4}{29}) = 90.$$

因此共織布 90 尺。

例題 2　公元前 1650 年左右的埃及數學著作《萊因德紙草書》的第四十題：「把 120 個麵包分給 5 個人，使每人所得成等差數列，且使最大的三份之和的七分之三是最小的兩份之和，問各得多少？」請解決這問題。

【解】設 5 個人分到的麵包分別為 $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$。依題意知道

$$\begin{cases} 5a + 10d = 120 \\ \frac{3(3a+9d)}{7} = 2a + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2d = 24, \\ a - 4d = 0. \end{cases}$$

解得 $a = 16, d = 4$。因此五人分別得到 16, 20, 24, 28, 32 個麵包。

例題 3　商店委託運送隊搬運 500 只瓷花瓶，雙方商訂每只花瓶運送費 20 元。若搬運打破一只，則不但不計運費，還要從運費中扣除 37 元。

(1) 已知搬運隊共獲得 9259 元，試問搬運中打破了幾只花瓶？

(2) 證明：無論打破幾只花瓶，運送費都落在某一等差數列上。

【解】設運送隊成功運送 x 只花瓶，打破 $500-x$ 只花瓶，並令此時所能得到的運送費為 $P(x)$ 元。依規定

$$P(x)=20x-37(500-x)=-18500+57x.$$

當 $P(x)=-18500+57x=9259$，解得 $x=487$。因此打破 $500-487=13$ 只花瓶。

由運送費公式 $P(x)=-18500+57x$ 知道：運送費除予 57 餘 25。因此運送費落在「被 57 除，餘數為 25 的等差數列上」。

5.2 數學裡的等差數列

例題 4 設 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列。如果正整數 m,n,p,q 滿足 $m+n=p+q$，那麼

$a_m+a_n=a_p+a_q$。

【解】設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項 a，公差 d。由通項公式知道：$a_k=a+(k-1)d$。因此

$$\begin{aligned}a_m+a_n&=\left[a+(m-1)d\right]+\left[a+(n-1)d\right]=2a+(m+n-2)d,\\ a_p+a_q&=\left[a+(p-1)d\right]+\left[a+(q-1)d\right]=2a+(p+q-2)d.\end{aligned}$$

由已知 $m+n=p+q$ 得到 $a_m+a_n=a_p+a_q$。

例題 5 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和 S_n 為

$$S_n=pn^2+qn^2 \quad (\ p \text{ 與 } q \text{ 是常數})。$$

求一般項 $a_n=$？並說明此數列是否為等差數列？如果是，寫下首項 a 與公差 d 的值。

【解】將 S_n 與 S_{n-1} 相減得到 a_n 為

$$a_n=S_n-S_{n-1}=p\left(n^2-(n-1)^2\right)+q(n-(n-1))=(p+q)+2p(n-1).$$

由此通項公式知道數列$\langle a_n \rangle$是首項$a = p + q$，公差$d = 2p$的等差數列。

例題 6　設n為正整數，且分數

$$\frac{n^2+12}{n+7}$$

不是最簡分數。試求所有n的可能值。

【解】設d整除$n+7$與n^2+12。那麼$d \mid (n^2+12)-(n+7)n$，即$d \mid (12-7n)$。利用$d \mid (n+7)$及$d \mid (12-7n)$，得到$d \mid (n+7)\times 7+(12-7n)$，即$d \mid 61$。也就是說，如果

$$\frac{n^2+12}{n+7}$$

不是最簡分數，那麼$\left(n+7, n^2+12\right)=61$，即$n = 61t-7$（$t$為正整數）。滿足題意的正整數

$$54, 115, 176, \cdots$$

是首項 54 公差 61 的等差數列。

5.3 一般數列與數學歸納法

例題 7　一機器狗每秒鐘前進或者後退一步，一步的距離都是一單位。將機器狗放置在數線的原點，面朝正的方向。程式設計師讓機器狗作「前進三步，然後後退兩步」的規律運動。設$P(n)$代表於第n秒時，機器狗所在的位置之座標。試求

(1) $P(5) =$ ？

(2) $P(5n) =$ ？

(3) $P(5n+4) =$ ？

【解】關於(1)：逐步計算得到

$$P(5) = 1+1+1-1-1 = 3-2 = 1.$$

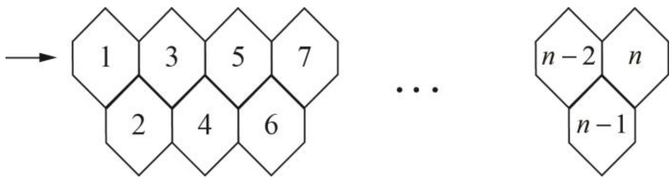
關於(2)：由(1)的經驗（或「前進三步，然後後退兩步」的規律運動）得知：每隔 5 秒，機器狗僅向前進一步，因此列式為

$$P(5n)=\overbrace{(3-2)+(3-2)+\cdots+(3-2)}^{n\text{ 個 5 秒}}=n.$$

關於(3)：利用(2)得到

$$P(5n+4)=P(5n)+1+1+1-1=n+2.$$

下圖是蜜蜂的蜂房，每個蜂房成六邊形的結構。蜜蜂從箭號所指的 1 號蜂房進入後，習慣性的會從編號較小的蜂房向相鄰的編號較大的蜂房移動。由於蜂房有上下兩層，所以會有不同的移動方式。例如，欲到 3 號蜂房，蜜蜂有$1\to 3, 1\to 2\to 3$這兩種不同的前進方式。規定數列$\langle f_n\rangle$如下：f_n代表蜜蜂前進到n號蜂房的所有不同的移動方式，並規定$f_1=1$。



例題 8　在上述蜜蜂的蜂房問題中：

(a) 求 f_4, f_5的值。

(b) 歸納 f_{n-2}, f_{n-1}, f_n的關係。

(c) 利用數學歸納法證明

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

【解】關於(a)：逐步計算得到 $f_1=1, f_2=1, f_3=2, f_4=3, f_5=5$ 。

關於(b)：從蜂房的編號容易得知：到達第n號蜂房的前一蜂房，有可能是第$n-2$或第$n-1$號蜂房。而到第$n-2$號蜂房，再到第n號蜂房的方法與到第$n-2$號蜂房的方法是一樣的，有 f_{n-2}種走法；同理，到第$n-1$號蜂房，再到第n號蜂房的方法與到第$n-1$號蜂房的方

法是一樣的，有 f_{n-1} 種走法。因此，歸納得 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 的關係。

關於(c)：（這裡採用第二數學歸納法的證題方法）

(1) 當 $n=1$ 時，左式 $f_1 = 1$，而右式

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = 1,$$

左，右式顯然相等。

(2) 現在假設 $n = 1,2,3,\cdots,k$ 時，

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

當 $n = k+1$ 時，利用 $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ 的關係式及 $n = k, k-1$ 的上述公式得到

$$\begin{aligned}
f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\
&= f_{k+1},
\end{aligned}$$

得證。

習題 1　若數列 $a,1,b$ 是公比大於 1 的等比數列；而數列 $a,1,b-1$ 是等差數列，則 $a =$ _____ 。

習題 2　判斷下列與等差數列相關的問題是否為真？

(1) 如果數列 $\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle$ 是等差數列，那麼數列 $\langle a_n + b_n\rangle$ 也是等差數列。

(2) 如果數列$\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$是等差數列，那麼數列$\langle a_n-b_n\rangle$也是等差數列。

(3) 如果數列$\langle a_n\rangle$的前n項和S_n為

$$S_n=pn^2+qn+r \quad (p,q,r \text{ 是常數}),$$

那麼數列$\langle a_n\rangle$是等差數列。

習題 3 請解決巴比倫晚期《泥板文書》中的問題：「10 個兄弟分 100 兩銀子，長兄最多，依次減少相同數目。現知第八兄弟分得 6 兩，問相鄰兩兄弟相差多少？」

習題 4 請解決《張丘建算經》中的問題：「今有某人拿錢贈人，第一人給 3 錢，第二人給 4 錢，第三人給 5 錢，其餘依次遞增分給。給完後把這些人所得的錢全部收回，再平均分配，每人可得 100 錢，問人數多少？」

習題 5 設$\langle a_n\rangle$是等差數列，且m,n,p是正整數。

如果

$$\lambda=\frac{p-m}{m-n},$$

那麼

(1) 證明：

$$\frac{a_p+\lambda a_n}{a_m}=1+\lambda.$$

(2) 證明：

$$\frac{\frac{S_p}{p}+\lambda\cdot\frac{S_n}{n}}{\frac{S_m}{m}}=1+\lambda.$$

(3) 若$S_n=48,S_{2n}=60$，則求S_{3n}的值。

習題 6　找出所有三邊長與三內角都成等差數列的三角形。

習題 7　在例題 7 的機器狗問題中。第幾秒時，機器狗會站在座標為 10 的位置上。

習題 8　甲乙兩地相距 3.6 公里，兩條狗從甲、乙兩地相向奔跑。它們每分鐘分別跑 450 公尺和 350 公尺。它們相向跑 1 分鐘後，同時調頭背向跑 2 分鐘，又調頭相向跑 3 分鐘，再調頭背向 4 分鐘，……，這樣直到相遇為止。問：從出發到相遇需幾分鐘。

動手玩數學

假設遊戲者為甲、乙兩人且甲先玩，並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

$$\boxed{1}\quad\boxed{2}\quad\boxed{3}$$

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至一個給定的正整數 N 者算贏(動彈不得或故意讓累加的數字超過所給定的數字 N 者算輸)。問：哪些正整數 N，乙方有必勝的策略？並說明你的理由。

挑戰題

古埃及《萊因德紙草書》裡談到「么分數」，像

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$$

這樣，分子為 1 的分數叫「么分數」。「么分數」是古埃及的基本單位，古埃及人經常將分數分解成若干個么分數的和。

如果么分數

$$\frac{1}{a},\frac{1}{21},\frac{1}{b}\ (a<b)$$

是等差數列，那麼正整數 a 與 b 的值各為何？

活動腦筋題

設 n 為正整數，n 項級數和 S_n 定為

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1} n.$$

試著用一個公式將 S_n 表達出來。

追尋等差數列的足跡的習題解答

習題 1

因為$a,1,b$為等比數列，所以

$$1^2=ab\Rightarrow ab=1;$$

又$a,1,b-1$為等差數列，所以

$$a+(b-1)=2\times 1\Rightarrow a+b=3.$$

由

$$\begin{cases}a+b=3\\ ab=1\end{cases}\quad\Rightarrow\{a,b\}=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

因為等比數列$a,1,b$的公比大於 1，所以

$$a=\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$a=$ $\underline{\quad\frac{3-\sqrt{5}}{2}\quad}$ 。

習題 2

(1) 是的。設$a_n=a+(n-1)d_1;b_n=b+(n-1)d_2$。相加得到$a_n+b_n=(a+b)+(n-1)(d_1+d_2)$。

因此$\langle a_n+b_n\rangle$是首項為$a+b$，公差是d_1+d_2的等差數列。

(2) 是的。承(1)的符號假設得到$a_n-b_n=(a-b)+(n-1)(d_1-d_2)$。因此$\langle a_n-b_n\rangle$是首項為

$a-b$，公差是d_1-d_2的等差數列。

(3) 不對（除非$r=0$）。當

$$S_n=pn^2+qn+r$$

時，一般項

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(pn^2 + qn + r\right) - \left(p(n-1)^2 + q(n-1) + r\right) = 2pn + (q-p).$$

但此時前n項的和為

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \sum_{i=1}^{n} 2pi + (q-p) \\ &= 2p\sum_{i=1}^{n} i + (q-p)n \\ &= 2p \times \frac{n(n+1)}{2} + (q-p)n \\ &= pn^2 + qn. \end{aligned}$$

這與給定的S_n公式不一樣（除非$r=0$）。

習題 3

設所分到的錢依序為

$$a, a+d, a+2d, \cdots, a+9d.$$

依題意知道

$$\begin{cases} S_{10} = 10a + 45d = 100 \\ a + 7d = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 9d = 20, \\ a + 7d = 6. \end{cases}$$

解得$a = \frac{86}{5}, d = -\frac{8}{5}$。因此相鄰兩兄弟相差$\frac{8}{5}$兩銀子。

習題 4

設一共分給n個人，且令a_i表示第i個人分到的錢數，即$a_1 = 3, d = 1$。

依題意得

$$\begin{aligned} 100n = S_n = 3n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1 &\Rightarrow n^2 - 195n = 0 \\ &\Rightarrow n = 195 \quad \text{或} \quad 0\,(\text{不合})。 \end{aligned}$$

因此人數有 195 人。

習題 5

設 $a_n = a+(n-1)d$，且 $a_m = a+(m-1)d; a_n = a+(n-1)d; a_p = a+(n-1)d$。

(1) 計算如下

$$\begin{aligned}a_p+\lambda a_n &= a+(p-1)d+\lambda\left(a+(n-1)d\right)\\ &=(1+\lambda)a+[(p-1)+\lambda(n-1)]d\\ &=(1+\lambda)a+\frac{pm-mn-p+n}{m-n}d\\ &=(1+\lambda)a+\frac{(p-n)(m-1)}{m-n}d\\ &=(1+\lambda)a+\frac{(m-n)+(p-m)}{m-n}(m-1)d\\ &=(1+\lambda)a+(1+\lambda)(m-1)d=(1+\lambda)[a+(m-1)d]\\ &=a_m(1+\lambda).\end{aligned}$$

(2) 由

$$\frac{S_p}{p}=a+\frac{p-1}{2}d;\ \frac{S_n}{n}=a+\frac{n-1}{2}d;\ \frac{S_m}{m}=a+\frac{m-1}{2}d$$

得

$$\begin{aligned}\frac{S_p}{p}+\lambda\cdot\frac{S_n}{n}&=(1+\lambda)a+\frac{1}{2}\cdot\frac{(p-n)(m-1)}{m-n}d\\ &=(1+\lambda)a+\frac{(m-1)d}{2}\cdot\frac{(m-n)+(p-m)}{m-n}\\ &=(1+\lambda)a+\frac{(m-1)d}{2}(1+\lambda)\\ &=(1+\lambda)\frac{S_m}{m}.\end{aligned}$$

(3) 令

$$\lambda=\frac{3n-n}{n-2n}=-2,$$

並將它代入(2)的公式得到

$$\frac{\frac{S_{3n}}{3n}+(-2)\frac{S_{2n}}{2n}}{\frac{S_n}{n}}=1+(-2) \quad \Rightarrow \frac{\frac{S_{3n}}{3n}+(-2)\frac{60}{2n}}{\frac{48}{n}}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{S_{3n}}{3}-60}{48}=-1$$

$$\Rightarrow S_{3n}=36.$$

習題 6

設三角形 ABC 的三邊邊長及三內角的角度分別為 $AB=s-d, AC=s, BC=s+d$ 與 $\angle C=\alpha-\theta, \angle B=\alpha, \angle A=\alpha+\theta$。由三角形的內角和為 180° 知道 $\angle B=\alpha=60^\circ$。

【方法一】由 A 作 BC 的垂線 AD，D 在 BC 上。因為直角三角形 ABD 中 $\angle BAD=30^\circ$, $AB=s-d$，所以 $BD=\frac{s-d}{2}, AD=\frac{s-d}{2}\sqrt{3}$。所以 $CD=BC-BD=(s+d)-\frac{s-d}{2}=\frac{s+3d}{2}$。因為三角形 ACD 也是直角三角形，所以利用畢氏定理得到

$$AC^2=AD^2+CD^2 \Rightarrow s^2=\left(\frac{s-d}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{s+3d}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow s^2=s^2+3d^3$$

$$\Rightarrow d=0.$$

故三角形 ABC 為正三角形。

【方法二】利用餘弦定理得到

$$s^2=(s-d)^2+(s+d)^2-2(s-d)(s+d)\cos 60^\circ \Rightarrow 3d^2=0 \Rightarrow d=0.$$

所以只有正三角形滿足題意。

習題 7

由公式 $P(5n)=n$ 知道：$P(40)=8, P(45)=9, P(50)=10, P(55)=11$，逐步考慮第 40 至 50 秒的位置得到：當第 42, 44, 46, 50 秒時，機器狗會在座標為 10 的位置上。

習題 8

將時間做如下的分割：

$$(1)+(2+3)+(4+5)+(6+7)+(8+9)+\cdots.$$

在(1)所代表的時間內（即開始的第一分鐘內）兩隻狗靠近了 0.8 公里；在(2+3)所代表的時間內兩隻狗又靠近了 0.8 公里；在(4+5)所代表的時間內兩隻狗再靠近了 0.8 公里；……；依次類推。其數學模式為：分割的每一區間內，兩隻狗會靠近 0.8 公里。由 $\frac{3.6}{0.8}=4.5$ 知道：兩隻狗會相遇於第 5 區間的時間內。答案為

$$(1)+(2+3)+(4+5)+(6+7)+(8+8.5)=44.5\,(\text{分鐘})。$$

動手玩數學參考解答

前兩個乙方有必勝策略的數為 $N=4,8$。猜測乙方有必勝策略的數為「N 是 4 的倍數」。原因如下：假設 $N=4d$ 。

(1) 當甲方第一次選的數為 1, 3 時，乙方就選 3, 1 兩數與之對應。結果剩下的數為 $4d-4$ 。

(2) 當甲方第一次選的數為 2 時，乙方就選 1 與之對應。結果剩下的數為 $4d-3$。第二輪，甲方僅能選 2 或 3 這兩個數，乙方就選 3, 2 兩數與之對應。結果剩下的數為 $4d-8$ 。

上述分析結果告訴我們：無論如何，乙方都能將剩餘的數控制為 4 的倍數。因此最後一定能將剩餘數降到 4 或 8 的情形。所以得證。

挑戰題參考解答

因為等差中項為 $\frac{1}{21}$ ，所以

$$\begin{aligned}\frac{2}{21}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}&\Rightarrow 2ab-21a-21b=0\\&\Rightarrow a(2b-21)-21b=0\\&\Rightarrow a(2b-21)-\frac{21}{2}(2b-21)=\frac{441}{2}\\&\Rightarrow\left(a-\frac{21}{2}\right)(2b-21)=\frac{441}{2}\\&\Rightarrow(2a-21)(2b-21)=3^2\cdot7^2.\end{aligned}$$

由最後的因數分解得到

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}2a-21&1&3&7&9\\\hline 2b-21&441&147&63&49\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c|c|c|c|c}a&11&12&14&15\\\hline b&231&84&42&35\end{array}$$

活動腦筋題參考解答

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & \text{當 } n \text{ 是奇數}\\ -\dfrac{n}{2} & \text{當 } n \text{ 是偶數}\end{cases}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{n}{2}+\frac{1+(-1)^{n+1}}{4}.$$