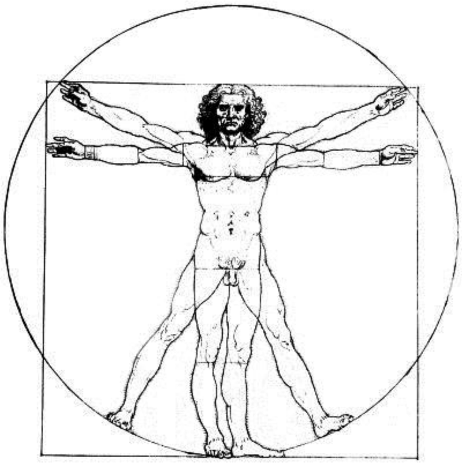
# 4 巧奪天工的發明……實數與複數



達文西的方、圓美學[1]

『負數』的誕生，一方面是由於生活的需要，例如「表示企業的盈餘與虧損」、「某一時刻之前與之後（如：公元前與公元後）」、「溫度在0℃以上與以下」等，都需要表示兩種具有相反意義的量之正數與負數。另一方面是從數學本身的需要，例如：負數，$-1$，是為了解方程式“$x+1=0$”而引進的。在數學發展中，負數的引進，經歷了一段漫長的過程，從中國古代數學名著《九章算術》的記載，得知在中國提出負數與負數運算，比其他國家早了幾世紀。在西方，印度數學家婆羅摩笈多是第一位對負數的運算作系統研究的數學家。

『實數』是為了彌補『有理數』的不夠與缺陷（例如：「單位正方形的對角線長$\sqrt{2}$」、「半徑是1的圓面積$\pi$」……等，都不是有理數。）而引進的。實數發明之後，「實數恰與直線（或數線）上的點有一一對應關係」是實數帶給我們的最大的用處。

與『負數』有異曲同工之妙的就屬『複數』了，它也是為了解方程式的需求而產生的。例如：複數，$i=\sqrt{-1}$，是為了解方程式“$x^2+1=0$”而建立的符號。『複數』是高斯所用的名詞，在他引進高斯平面與複數一一對應之後，複數才被廣泛的使用。

[1] 十七世紀德國著名的天文學家克卜勒曾經這樣說過：「幾何學裡有兩件寶，一是勾股定理，另一個是黃金分割」。達文西遵循黃金分割這條鐵律，進行他的彩繪人生，蒙娜麗莎的微笑就是他的傑作。本節的圖騰是達文西在 1492 年的著名畫作，名為〈人體比例圖〉，他發現一個人的肢體在雙手平張與直腳站立時，只能放入方形框架；但雙手上抬與雙腳微張時，卻能放入圓形框架。他不但完成許多解剖細圖，更有許多畫作強調連續的動作過程，因此被尊為動態分析的鼻祖。在 1509 年時，達文西把這幅素描印在一本

數學書籍上，現在許多解剖學的醫學書籍都以〈人體比例圖〉當作書本封面的圖騰。

### 4.1 數線上的實數

實數井然有序的落在數線上，「可以比較大小」是實數給人的第一印象。

**例題 1** 在一個數學競賽中，二毛與四毛所得的分數和等於大毛與三毛所得的分數和。如果把二毛與三毛所得的分數對調，那麼大毛與三毛所得的分數和將高於另外兩者的分數和，而且四毛的分數高於二毛與三毛的分數和。請列出她們所得分數的高低次序。

【解】設大毛，二毛，三毛與四毛所得的分數依序為 $a,b,c,d$。顯然 $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0$，又由題意得到

$$\begin{aligned} b+d &= a+c; \\ a+b &> c+d; \\ d &> b+c. \end{aligned}$$

由第二式與第一式相加得到

$$a+2b+d > a+2c+d \Rightarrow b > c.$$

由第二式與第一式相減得到

$$a+b-b-d > c+d-a-c \Rightarrow a > d.$$

組合「$b>c$」,「$a>d$」與第三式得到「$a>d>b>c$」，即「大毛的分數＞四毛的分數＞二毛的分數＞三毛的分數」。

**例題 2** 設 $a,b,c,d$ 是實數，且滿足

$$\begin{cases} a^2+b^2=1; \\ c^2+d^2=1; \\ ac+bd=0. \end{cases}$$

求 $a^2+c^2$ 的值。

【解】計算如下

$$
\begin{aligned}
a^2+c^2 &= a^2+c^2\left(a^2+b^2\right) \quad (\text{利用 } a^2+b^2=1)\\
&= a^2+a^2c^2+b^2c^2\\
&= a^2+b^2d^2+b^2c^2 \quad (\text{利用} ac=-bd)\\
&= a^2+b^2\left(c^2+d^2\right)\\
&= a^2+b^2 \quad (\text{利用} c^2+d^2=1)\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

有理數（分數）是指在數線上可以表成$\frac{a}{b}$（$a$是整數，$b$為正整數）形式的實數；而不能用分數形式表現的實數就稱為無理數。早在歐基里德之前，希臘人就知道「有無理數的存在」。像古希臘哲學家亞里斯多德就利用歸謬證法證明過「邊長為 1 的正方形之對角線長$\sqrt{2}$不是有理數」。用符號$\sqrt{2}$來表示無理數是尤拉之後的事情，古希臘時期，無理數都是用幾何學的量來表示。除了$\sqrt{2}$是無理數之外，模仿亞里斯多德的歸謬證法也可以知道$\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt[3]{2},\cdots$等也都是無理數。在《幾何原本》第十卷裡，出現過「$\sqrt{2}$是無理數」的應用：如果$a,b$是有理數且滿足$a+b\sqrt{2}=0$，則$a=b=0$。這命題的證明很容易。先假設$b\neq 0$，那麼

$$\sqrt{2}=\frac{-a}{b},$$

這與「$\sqrt{2}$是無理數」矛盾。因此$b=0$，此時$a=0$。在這裡，我們提出一則稍微困難一點的類似問題。

**例題 3**　如果$a,b,c$是有理數且滿足$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$，則$a=b=c=0$。

【證明】將式子

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$$

乘以$\sqrt[3]{2}$得到

$$a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}+2c=0.$$

由

$$b\left(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\right)-c\left(a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}+2c\right)=0\Rightarrow\left(b^2-ac\right)\sqrt[3]{2}=2c^2-ab.$$

如果 $b^2-ac\neq 0$，那麼

$$\sqrt[3]{2}=\frac{2c^2-ab}{b^2-ac}$$

是有理數，此與「$\sqrt[3]{2}$ 是無理數」矛盾。所以 $b^2-ac=0$ 且 $2c^2-ab=0$。由最後兩個式子推得 $b^3=abc=2c^3$。同理，如果 $c\neq 0$，那麼

$$\sqrt[3]{2}=\frac{b}{c}$$

是有理數，此與「$\sqrt[3]{2}$ 是無理數」矛盾。所以 $c=0,b=0$，代入 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ 得到 $a=0$，得證。

### 4.2 根號單項的根數

雖然平方根 $\sqrt{2}$ 與立方根 $\sqrt[3]{2}$ 這兩個實數都不是有理數，但是它們卻滿足很美好的代數關係

$$\sqrt{2}^2=2,\ \sqrt[3]{2}^3=2.$$

談到根式問題，就必須要瞭解等式：

平方根式：如果 $p,q$ 是正實數，且 $p>q$，那麼

$$\sqrt{p+q+2\sqrt{pq}}=\sqrt{p}+\sqrt{q};$$
$$\sqrt{p+q-2\sqrt{pq}}=\sqrt{p}-\sqrt{q}.$$

立方根式：如果 $a,b$ 是實數，那麼

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\Rightarrow a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3+3ab(a+b)};$$
$$(a-b)^3=a^3+b^3-3ab(a-b)\Rightarrow a-b=\sqrt[3]{a^3+b^3-3ab(a-b)}$$

這些根式問題的證明都不難，只需將其取平方或者取立方就容易導出。因此，揭開這襲

根號罩頂的神秘面紗之萬靈丹就是「遇到平方根式就取平方，碰到立方根式就取立方[2]」。

[2] 根數的四則運算問題是很麻煩的，沒有統一的方法。數學家尤拉在 1770 年出版一本《代數基礎》的教科書，在處理立方根的問題上，他就是採取「將整個式子取立方」的手法。文中那句話的意境就是來自尤拉方法的精髓，它也印證了牛頓的名言：「若是我比別人更有遠見，只因我站在巨人的肩上。」

**例題 4**　化簡

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=?$$

（1976 AMC）

【解】將欲求的式子取平方得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\right)^2 &= \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{5}+1}\\ &=\frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}\\ &=2.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{2}.$$

**例題 5**　化簡

$$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=?$$

（1980 AMC）

【解】設

$$a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}},\ b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}},\ x=a+b.$$

由

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\Rightarrow x^3=10-9x.$$

因為

$$x^3+9x-10=(x-1)\left(x^2+x+10\right),$$

且 $x^2+x+10=0$ 無實根（配平方得知），所以 $x=1$，即

$$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1.$$

**例題 6**　設 $a$ 與 $b$ 是兩個有理數，且滿足等式

$$\frac{\sqrt{a-\sqrt{11}}}{\sqrt{2}+\sqrt{b-9\sqrt{11}}}=\frac{\sqrt{11}}{11}.$$

試求有理數數 $a$ 與 $b$ 的值。

【解】將兩邊平方之後得到

$$(11a-b-2)-2\sqrt{11}=2\sqrt{2b-18\sqrt{11}}.$$

再次將兩邊平方之後得到

$$\begin{aligned}&(11a-b-2)^2+44-4(11a-b-2)\sqrt{11}=8b-72\sqrt{11}\\&\Rightarrow\begin{cases}(11a-b-2)^2+44=8b\\11a-b-2=18\end{cases}\\&\Rightarrow\begin{cases}b=46\\a=6\end{cases}\end{aligned}$$

## 4.3 黃金分割與美學原理

中世紀數學家斐波那契調查了大量的人體數值後獲知：肚臍高度與身高的比為

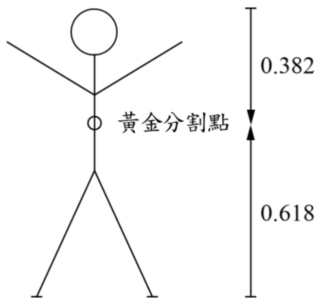
$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\doteqdot 0.618$$

時，才稱得上是「完美女人」或「少女殺手」，此時（把身高視為 1）

$$\frac{\text{肚臍至頭頂的距離}}{\text{肚臍高度}}=\frac{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$$
$$=\frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\doteqdot 0.618$$

也是同一比值。

像這樣，把一條線段（身長）分為兩部分，當長段（腳底至肚臍）與整條線段（身高）之比恰等於短段（肚臍至頭頂，或上半身）與長段（下半身）之比時，就稱為『黃金分割』，分割點稱為『黃金分割點』，這個比值就叫『黃金比率』。因此「完美女人」的肚臍是整個身長的『黃金分割點』。據說，大多數女性肚臍高度與身高的比約在 0.58 左右，所以平時，可借助高跟鞋提高肚臍高度，美化身材；跳芭蕾舞時，用腳尖墊高肚臍高度讓觀眾欣賞到完美女人之舞。[3]




[3] 在 1863 年於愛琴海的一個小島挖掘出來的古希臘維納斯女神，她的上半身與下半身的比率就是 0.618。

**例題 7**　說明『黃金比率』就是

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

【解】假設線段長度為 1，長段是 $x(0<x<1)$，短段為 $1-x$。因為是黃金分割，所以

$$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x}\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\text{(不合)。}$$

所以長段 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$。依定義，『黃金比率』為

$$\frac{\text{長段}}{\text{整條線段}}=\frac{x}{1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

**例題 8**　設 $r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 為黃金比率。求

$$\frac{\pi r+1}{r+\pi+1}$$

的值。

【解】將 $r$ 的根號形式代入做化簡，可以得到值為黃金比率自己。在此提出不同的方法，目的在讓你感受到 $\pi$ 其實是多餘的（唬人的）。因為黃金比率 $r$ 滿足

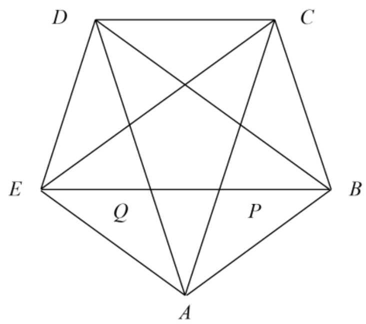
$$r^2=1-r\Rightarrow 1=r^2+r.$$

代入分式得到

$$\frac{\pi r+1}{r+\pi+1}=\frac{\pi r+r^2+r}{r+\pi+1}=r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

古希臘畢達哥拉斯學派的代表徽章是正五邊形的五條對角線所構成的正五角星形。這正五角星形隱藏著許多黃金分個點：

**例題 9**　正五邊形 $ABCDE$ 中，點 $P$ 是 $AC$ 與 $BE$ 的交點；點 $Q$ 是 $AD$ 與 $BE$ 的交點。




(1) 證明：點 $P$ 是 $BE$ 的黃金分割點（$PE$ 是長段）；

(2) 證明：點 $P$ 也是 $BQ$ 的黃金分割點（ $PB$ 是長段）。

【證明】設此正五邊形的對角線為 1（即 $BE=AC=AD=BD=CE=1$），$B$ $x=$ 。由此得到 $PB=PA=QA=EQ=x, PQ=1-2x$，又四邊形 $PEDC$ 為平行四邊形，因此正五邊形的邊長為 $PE=PQ+QE=(1-2x)+x=1-x$，即 $AB=AE=1-x$。利用三角形 $APB$ 與三角形 $EAB$ 相似得到

$$\begin{aligned}\frac{PB}{AB}=\frac{AB}{EB} &\Rightarrow \frac{x}{1-x}=\frac{1-x}{1}\\ &\Rightarrow (1-x)^2=x\\ &\Rightarrow x^2-3x+1=0\\ &\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{或} \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

若 $PB=x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，則 $PQ=1-2x=-2-\sqrt{5}<0$（不合）。因此，$PB=x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 。

關於(1)：由 $x$ 的精確值得到

$$\frac{PE}{BE}=\frac{1-x}{1}=1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

即點 $P$ 是 $BE$ 的黃金分割點；

關於(2)：因為點 $P$ 是 $BE$ 的黃金分割點，所以

$$\frac{PB}{BQ}=\frac{PB}{PE}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

即點 $P$ 是 $BQ$ 的黃金分割點。

### 4.4 簡易的算-幾不等式

**定理 4.1 (算-幾不等式簡易版)**設實數 $a$ 與 $b$ 滿足 $a\geq 0, b\geq 0$。證明

(1) $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 。

(2)「(1)的等號成立」的充要條件為「 $a=b$ 」。

【證明】關於(1)的證明：將兩邊同乘以 2，再移項相減得到

$$(a+b)-2\sqrt{ab}=\sqrt{a}^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0.$$

所以$(a+b)-2\sqrt{ab}\geq 0$，即

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

關於(2)的證明：如果$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$，利用(1)的方法，容易推得

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}.$$

即$a=b$。相反的，假設$a=b$，此時

$$\frac{a+b}{2}=a=\sqrt{a\cdot a}=\sqrt{ab}.$$

**例題 10**　有兩種不同的阻力會影響飛機飛行：

(1) 空氣阻力$F_a$：

這種阻力和飛機速度$v$的平方成正比。波音 747 的這種關係為$F_a=3v^2$。

(2) 電感阻力$F_i$：

這種阻力因速度$v$增加而減少，與飛機重量$m$的平方成正比。波音 747 的這種關係為$F_i=243\times 10^{-4}\times\frac{m^2}{v^2}$。

波音 747 所受的總阻力$F_t$是空氣阻力$F_a$與電感阻力$F_i$的和。最有效的速度是總阻力最小時的速度。問：波音 747 最有效的速度是多少？

【解】由題意知道

$$F_t=F_a+F_i=3v^2+243\times 10^{-4}\times\frac{m^2}{v^2}$$

利用算-幾不等式

$$\geq 2\sqrt{3v^2 \times 243 \times 10^{-4} \times \frac{m^2}{v^2}}$$
$$= \frac{54m}{100} = \frac{27m}{50}.$$

等號成立的條件為

$$3v^2 = 243 \times 10^{-4} \times \frac{m^2}{v^2} \Rightarrow v = \frac{3\sqrt{m}}{10}.$$

因此，當波音 747 的速度為 $\frac{3\sqrt{m}}{10}$ 時，總阻力會最小，為 $\frac{27m}{50}$ 。

**例題 11**　考量道路的摩擦係數與路口寬度的因素，某交叉路口的「閃黃燈秒數」$f(v)$（秒）應以

$$f(v) = \frac{v}{10} + \frac{90}{v} + 1$$

這則公式規範較適宜，這裡的 $v$（公里/小時）代表該路段的最高時速限制。

(1) 若這條道路的最高時速限制定為每小時 60 公里，請依公式計算，這交叉路口的「閃黃燈秒數」應該是幾秒。

(2) 證明：無論此路段的最高時速限制 $v$（公里/小時）訂為何值，這交叉路口的「閃黃燈秒數」都不小於 7 秒。

(3) 問：將最高時速限制 $v$（公里/小時）訂為何值時，這交叉路口的「閃黃燈秒數」會剛好是 7 秒。

【解】(1)：由題意得到

$$f(60) = \frac{60}{10} + \frac{90}{60} + 1 = 8.5 \text{ (秒)}。$$

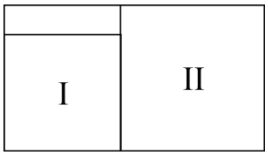
(2)：利用算-幾不等式得到

$$f(v) = \frac{v}{10} + \frac{90}{v} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{v}{10} \times \frac{90}{v}} + 1 = 7.$$

(3)：由 $f(v) = 7$ 解得

$$v^2 - 60v + 900 = 0 \Rightarrow v = 30 \text{（公里/小時）}。$$

**例題 12**　如下圖，正方形Ⅰ（邊長為$a$）與正方形Ⅱ（邊長為$b$）的面積和為 1。




證明：剛好包住正方形Ⅰ與Ⅱ的矩形之面積

$$\le \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

【證明】剛好包住正方形Ⅰ與Ⅱ的矩形之面積為$(a+b)b$。利用$a^2+b^2=1$可得

$$1+2(a+b)b=\left(a^2+b^2\right)+\left(2ab+2b^2\right)=(a+b)^2+2b^2.$$

利用算-幾不等式得到

$$\frac{1+2(a+b)b}{2}=\frac{(a+b)^2+2b^2}{2}\ge\sqrt{2(a+b)^2b^2}=\sqrt{2}(a+b)b.$$

移項整理得到

$$(a+b)b\le\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

### 4.5 給複數定方向，量距離的高斯……複數與高斯平面

實數的平方都大於或等於零，因此方程式$x^2=-1$沒有實數解。換句話說，$-1$的平方根$\sqrt{-1}$不可能為實數，尤拉認為這個數是「想像中的數」，並用符號$i$來表示$x^2=-1$之一根$\sqrt{-1}$，因此$i^2=-1$。有了$i$及$i^2=-1$之後，實數的四則運算（包括交換律與結合律）就可以擴展到複數上。到此為止，複數只能算是代數運算體系之一員。

笛卡爾創立座標平面之後，高斯援用這個平面當樣本，將原本是序對$(a,b)$的座標，把它對應到複數$a+bi$去。這樣就可以將複數與平面上的每個點一一對應，我們稱這樣的平面為高斯平面（或複數平面）。高斯的這種想法，有如給複數定方向、取了距離，將複數從代數體系脫胎換骨成幾何領域的一員。這種既有代數，又隱含幾何意義的複數，當然威力會是無窮的。在三角學裡，我們將較詳細的介紹與使用它的威力。

**例題 13**　設 $n$ 與 $(n+i)^4$ 都是整數。求 $n$ 的值。

【解】因為

$$(n+i)^4=\left(n^4-6n^2+1\right)+4\left(n^3-n\right)i,$$

所以

$$n^3-n=0\Rightarrow n=-1,0,1.$$

**習題 1**　化簡

$$\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=?$$
$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=?$$

**習題 2**　承例題 2：

(1) 求 $b^2+d^2$ 的值。

(2) 求 $ab+cd$ 的值。

**習題 3**　利用例題 3 證明：$\sqrt[3]{2}$ 不能表為 $a+b\sqrt{2}$（$a,b$ 是有理數）的形式。

**習題 4**　設 $a,b$ 為正實數。比較

$$a^2+\frac{1}{a^2}\quad \text{或} \quad a+\frac{1}{a}$$

的大小。

**習題 5**　設 $r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 為黃金比率。問：下列五個值中，哪幾個的值也是黃金比率：

$$\frac{1}{r+1};\quad \frac{1-r}{r};\quad \frac{1-2r}{r-1};\quad \frac{\sqrt{2}r+1}{r+\sqrt{2}+1};\quad \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1}.$$

**習題 6** 請將下列各數化成 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ 的形式（其中 $a,b,c$ 是有理數）：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}+1}$。

（86 年台大推甄）

**習題 7** 有關實數的許多等式都是起源於幾何上的解釋，現在要提的就是一個例子：設實數 $a,b,c;x,y,z$ 滿足

$$\begin{aligned}a&=bz+cy,\\ b&=cx+az,\\ c&=ay+bx.\end{aligned}$$

試推導等式

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{b^2}{1-y^2}=\frac{c^2}{1-z^2}.$$

如果你熟悉幾何學上的『投影定理』與『正弦定理』的話，那麼請解釋這等式與它們兩個定理的關係。

**習題 8** （尤拉定理）若 $A,B,C,D$ 是數線上的四個點（由左至右），則線段 $AB,CD,AD,$ $BC,BD,AC$ 會滿足等式

$$AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD.$$

【註】這是瑞士數學家尤拉提出的一則定理，此定理與古希臘天文學家、數學家托勒密所發現的『托勒密定理』有異曲同工之妙。

**習題 9** 設 $N$ 為正整數，且不是完全平方數。為了求 $\sqrt{N}$ 的近似值，先估計

$$p=\sqrt{N}$$

介於哪兩個連續整數之間，得到

$$a<\sqrt{N}<b,$$

其中$a$與$b$是相鄰的正整數。海龍法是把

$$q=\frac{a+\frac{N}{a}}{2}$$

視為$\sqrt{N}$的近似值；而等比例法是將

$$r=a+\frac{N-a^2}{a+b}$$

當成$\sqrt{N}$的近似值。試比較$p,q,r$的大小關係？

**習題 10** 薄登釋同學對許教授《算術講義》書中的一則不等式問題很感興趣：

$$a_1\ge b_1\ge b_2\ge a_2>0, a_1a_2\ge b_1b_2 \Rightarrow a_1+a_2\ge b_1+b_2.$$

他發現，只需四個步驟就可以解決此問題，於是興高采烈將答案寫下寄給教授欣賞：

由算-幾不等式得到

$$\frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1a_2}\Rightarrow a_1+a_2\ge 2\sqrt{a_1a_2}; \tag{1}$$

同法可得

$$\frac{b_1+b_2}{2}\ge\sqrt{b_1b_2}\Rightarrow b_1+b_2\ge 2\sqrt{b_1b_2}. \tag{2}$$

由$(1)-(2)$得到

$$(a_1+a_2)-(b_1+b_2)\ge 2(\sqrt{a_1a_2}-\sqrt{b_1b_2}). \tag{3}$$

因為$a_1a_2\ge b_1b_2$，所以$\sqrt{a_1a_2}-\sqrt{b_1b_2}\ge 0$，即

$$(a_1+a_2)-(b_1+b_2)\ge 0\Rightarrow a_1+a_2\ge b_1+b_2. \tag{4}$$

問：薄登釋同學的作法是否正確（若有誤，請指出哪幾個步驟出錯）？你有

好的方法嗎？

**習題 11**　求方程式

$$\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37}=\sqrt[3]{2}$$

的解。

**習題 12**　設 $a,b$ 為實數，數學家定義代數運算符號“ ♯”為

$$a \sharp b = a+b+ab.$$

(1) 求值 $(3+\sqrt{2})\sharp(3-\sqrt{2})$ 。

(2) 驗證等式 $(a\sharp b)\sharp c = a\sharp(b\sharp c)$ 。

$\boxed{\textbf{動手玩數學}}$

設 $a,b,c$ 是不完全相等的實數。

(1) 證明不等式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$ 恆成立。

(2) $a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab$ 三數中至少有一個大於 0。

(3) 給一組 $a,b,c$ 的值使得 $a^2-bc<0, b^2-ac<0, c^2-ab>0$ 。

$\boxed{\textbf{挑戰題}}$

台灣師範大學數學系九十一學年度推薦甄選入學問題：求方程式

$$\sqrt[3]{(10+x)^2}+\sqrt[3]{(3+x)^2}=\sqrt[3]{(10+x)(-3-x)}+7$$

的根。

## 参考文獻

[1] William Dunham,Euler:The Master of Us All, MAA.

# 巧奪天工的發明……實數與複數的習題解答

## 習題 1

將欲求的根式取平方得到

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2 &= (7+\sqrt{13})-2\sqrt{(7+\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}+(7-\sqrt{13})\\ &=14-2\sqrt{49-13}\\ &=14-12=2.\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=\sqrt{2}.$$

同樣的方法可得

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}\right)^2 &= \sqrt[3]{16}-1+2\sqrt{\sqrt[3]{64}-2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}}\\ &=\sqrt[3]{16}-1+2\left(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{2}\right)\\ &=3.\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{3}.$$

## 習題 2

(1) 由 $a^2+b^2+c^2+d^2=2$ 及 $a^2+c^2=1$ 得到 $b^2+d^2=1$。

(2)

$$\begin{aligned}(ab+cd)^2 &= a^2b^2+2abcd+c^2d^2\\ &=a^2\left(1-a^2\right)-2a^2c^2+c^2\left(1-d^2\right)\\ &=\left(a^2+c^2\right)-\left(a^2+c^2\right)^2\\ &=1-1^2\\ &=0.\end{aligned}$$

## 習題 3

假設 $\sqrt[3]{2}=a+b\sqrt{2}$ 。移項平方得到

$$\left(b\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt[3]{2}-a\right)^2 \Rightarrow \left(a^2-2b^2\right)-2a\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=0.$$

最後的等式與例題 2 的結論矛盾，所以「$\sqrt[3]{2}$ 不能表為 $a+b\sqrt{2}$ 的形式」。

## 習題 4

將兩式相減得到

$$\begin{aligned}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)&=\frac{a^3(a-1)-(a-1)}{a^2}\\&=\frac{(a-1)\left(a^3-1\right)}{a^2}\\&=\frac{(a-1)^2\left(a^2+a+1\right)}{a^2}.\end{aligned}$$

由此得到，當 $a=1$ 時，兩式相等，即

$$a^2+\frac{1}{a^2}=a+\frac{1}{a};$$

而當 $a\neq 1$ 時，

$$a^2+\frac{1}{a^2}>a+\frac{1}{a}.$$

## 習題 5

將 $1=r+r^2$ 代入前四個式子分別得到

$$\frac{1}{r+1}=\frac{r+r^2}{r+1}=r;$$
$$\frac{1-r}{r}=\frac{r+r^2-r}{r}=r;$$
$$\frac{1-2r}{r-1}=\frac{r+r^2-2r}{r-1}=r;$$
$$\frac{\sqrt{2}r+1}{r+\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}r+r+r^2}{r+\sqrt{2}+1}=r.$$

將 $r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 代入第四個式子得到第五個式子。所以，這五個式子都是黃金分割率。

## 習題 6

(1)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}.$$

(2) 設

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}+1}=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\\
&\qquad\Rightarrow (a+2b+10c)+(5a+b+2c)\sqrt[3]{2}+(a+5b+c)\sqrt[3]{4}=1\\
&\qquad\Rightarrow \begin{cases} a+2b+10c=1\\ 5a+b+2c=0\\ a+5b+c=0 \end{cases}\\
&\qquad\Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{25};\\ b=-\dfrac{1}{75};\\ c=\dfrac{8}{75}. \end{cases}
\end{aligned}$$

## 習題 7

將 $a,b,c$ 當常數， $x,y,z$ 視為變數，可以解得

$$\begin{cases} x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; \\ y = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}; \\ z = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{cases}$$

代入

$$\frac{a^2}{1-x^2},\ \frac{b^2}{1-y^2},\ \frac{c^2}{1-z^2}$$

都得到分式

$$\frac{2a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

【註】如果將$a,b,c$當作一個三角形三邊邊長，把$x,y,z$視為

$$\cos\angle A, \cos\angle B, \cos\angle C,$$

那麼已知就是「投影定理」，而推論就是「正弦定理」。

## 習題 8

設$A,B,C,D$的座標分別為$a,b,c,d$。

$$\begin{aligned} AB\times CD + AD\times BC &= (b-a)(d-c)+(d-a)(c-b) \\ &= (bd-bc-ad+ac)+(cd-bd-ac+ab) \\ &= cd-bc-ad+ab \\ &= BC = AC\times BD.AC\times BD \end{aligned}$$

## 習題 9

由算-幾不等式得到

$$q = \frac{a+\dfrac{N}{a}}{2} > \sqrt{a\cdot\frac{N}{a}} = \sqrt{N} = p.$$

得到$q>p$。

因為$(b-\sqrt{N})(\sqrt{N}-a)>0$，所以

$$a\sqrt{N}+b\sqrt{N}-N-ab>0 \Rightarrow (a+b)\sqrt{N}>N+ab$$
$$\Rightarrow p=\sqrt{N}>\frac{N+ab}{a+b}=a+\frac{N-a^2}{a+b}=r.$$

因此$p>r$。綜合得到$q>p>r$。

## 習題 10

第(3)步出現錯誤。在此提出一種證法：由$a_1 \ge b_1 \ge b_2 \ge a_2$得到

$$(a_1-a_2)^2 \ge (b_1-b_2)^2 \Rightarrow a_1^2-2a_1a_2+a_2^2 \ge b_1^2-2b_1b_2+b_2^2.$$

再與不等式$4a_1a_2 \ge 4b_1b_2$相加，得到

$$a_1^2+2a_1a_2+a_2^2 \ge b_1^2+2b_1b_2+b_2^2 \Rightarrow (a_1+a_2)^2 \ge (b_1+b_2)^2.$$

因為$a_1+a_2>0, b_1+b_2>0$，所以$a_1+a_2 \ge b_1+b_2$。

## 習題 11

將兩邊取立方得到

$$(13x+37)-(13x-37)-3\sqrt[3]{13x+37}\cdot\sqrt[3]{13x-37}\left(\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37}\right)=2.$$

再代原方程式得到

$$24=\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{13^2x^2-37^2}.$$

將兩邊取立方得到

$$4\cdot 12^3=13^2x^2-37^2 \Rightarrow x=\pm 7.$$

代進原方程式驗算，皆符合。故方程式的解為$x=\pm 7$。

## 習題 12

(1) 由代數符號 ♯ 的定義得到

$$(3+\sqrt{2})\sharp(3-\sqrt{2})=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=13.$$

(2) 驗證左式得到

$$\begin{aligned}(a\sharp b)\sharp c&=(a+b+ab)\sharp c\\&=(a+b+ab)+c+(a+b+ab)c\\&=a+b+c+ab+bc+ca+abc.\end{aligned}$$

同法可得 $a\sharp(b\sharp c)=a+b+c+ab+bc+ca+abc$。因此 $(a\sharp b)\sharp c=a\sharp(b\sharp c)$。

## 動手玩數學參考解答

(1) 因為 $2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2>0$，所以

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$ 。

(2) 由(1)知道：$a^2-bc,b^2-ac,c^2-ab$ 三數的和為正，所以 $a^2-bc,b^2-ac,c^2-ab$ 三數中至少有一個大於 0。

(3) 取 $a=1,b=1.1,c=2$ 時

$$a^2-bc=-1.2<0,b^2-ac=-0.79<0,c^2-ab=2.9>0$$

## 挑戰題參考解答

將等式移項整理為

$$\sqrt[3]{(10+x)^2}+\sqrt[3]{(10+x)(3+x)}+\sqrt[3]{(3+x)^2}=7.$$

兩邊乘以 $\sqrt[3]{10+x}-\sqrt[3]{3+x}$ 得到

$$\begin{aligned}7 &= \sqrt[3]{10+x}^{3} - \sqrt[3]{3+x}^{3} \\ &= \left(\sqrt[3]{10+x} - \sqrt[3]{3+x}\right)\left(\sqrt[3]{(10+x)^{2}} + \sqrt[3]{(10+x)(3+x)} + \sqrt[3]{(3+x)^{2}}\right) \\ &= 7\left(\sqrt[3]{10+x} - \sqrt[3]{3+x}\right).\end{aligned}$$

所以得到

$$\begin{aligned}1 = \sqrt[3]{10+x} - \sqrt[3]{3+x} &\Rightarrow \sqrt[3]{10+x}^{3} = (1+\sqrt[3]{3+x})^{3} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{3+x}^{2} + \sqrt[3]{3+x} - 2 = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{3+x} = 1,\ -2 \\ &\Rightarrow x = -2, -11.\end{aligned}$$