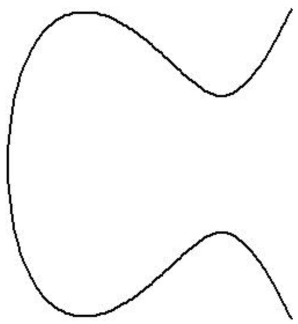
3 數學的女王……數論



$$y^2 = x^3 - 3x + 3$$

費馬大定理與橢圓曲線[1]

數學王子高斯（與阿基米得、牛頓被譽為史上最偉大的三位數學家）曾說：「數學是科學的皇后，而數論是數學的女王。」他在 1801 年的名著《算術研究》奠定了近代數論的基礎，不但是數論領域的劃時代鉅著，也是歷史上最有代表性的數學著作之一。難怪集合論的創始人康德這樣評價此書：《算術研究》是數論的憲章。高斯在 24 歲出版的《算術研究》開創了現代數論的新紀元，書中出現有關正多邊形的作圖（正十七邊形），方便的同餘記號（≡）以及優美的二次互反定律的首次證明等。

關於《算術研究》這本書，流傳著這樣一則故事，1849 年 7 月 16 日，哥廷根大學為高斯獲得博士學位五十週年舉行慶祝會，當進行到某一程序時，高斯準備用《算術研究》的一張原稿點煙，當時在場的數學家狄利克雷（後來繼承了高斯的職位），像見到瀆聖行為一樣吃了一驚，立刻冒失地從高斯手中搶下這一頁紙，並一生珍藏它；狄利克雷的編輯在他死後，還從他的論文中找到這張原稿。高斯曾經要求在他的墓碑上刻一個正十七邊形，但事與願違，由於雕刻工認為正十七邊形刻出來後幾乎和圓一模一樣，而就在高斯紀念塔上刻了一顆有十七個角的星。

現在中學所教授的數論理論，大多取自於兩千多年前歐基里德的名著《幾何原本》，特別是其中的第七、八、九這三卷。《幾何原本》可以說替數論打下基礎、建立雛形，而《算術研究》則是替高等數論的研究拉開序幕。十九世紀德國德國數學家克羅內克說：「整數是上帝創造的，其他的數才是人類的貢獻」，足見整數在數學家的心中是何等的重要。

[1] 費馬大定理「$x^n + y^n = z^n (n \geq 3)$ 沒有正整數解 x, y, z」是十七世紀法國數學家費馬在一本書的邊頁上寫下的猜測。費馬寫道：「對此猜想，我已發現了一個巧妙的証明，可惜

這裡頁邊的空白太小，寫不下了。」三百多年以來，許多優秀的數學家採用種種方法試圖補證這個定理，但始終都未能獲得成功，直至最近才由英國的維爾斯解決。上圖中的曲線是一種稱為橢圓曲線（此橢圓曲線並非中學所學的橢圓）的圖形，這類曲線是維爾斯解決費馬大定理的重要武器。維爾斯在 1993 年的初稿證明是有些許瑕疵的，但稍後亦被維爾斯與他的學生泰勒修正過來。紐約時報曾在 1993 年 6 月 29 日以「維爾斯放出數學衛星，350 年的古老問題已被攻克」為題發表有關報導。

3.1 因數與倍數

整數是數論的研究對象，尤其是整數的除法性質。早在古希臘的數學中，已出現像「算數基本定理」、「歐基里德輾轉相除法」與「質數有無限多個」等這些與除法性質相關的深奧定理。「算數基本定理」，也稱為「整數的唯一分解定理」，是數論的基本定理，其內容是：任何一個大於 1 的正整數都可分解為若干個質因數的乘積，並且如果不計順序的話，這種分解是唯一的。這個結論出現在歐基里德《幾何原本》第九卷的命題十四之中，顯然，歐基里德就有因數分解的觀念。高斯在 1801 年出版的經典名著《算術講話》中，重新陳述並作了「算數基本定理」的證明。

如果正整數 a 的標準分解式為

【算數基本定理】 $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ ，

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是滿足 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ 的質數，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正整數。利用樹狀圖或者將乘式

$$\overbrace{\left(p_1^0 + p_1^1 + \cdots + p_1^{a_1}\right)}^{a_1+1\text{ 項}} \times \overbrace{\left(p_2^0 + p_2^1 + \cdots + p_2^{a_2}\right)}^{a_2+1\text{ 項}} \times \cdots \times \overbrace{\left(p_n^0 + p_1^n + \cdots + p_n^{a_n}\right)}^{a_n+1\text{ 項}}$$

展開可以得知：這個乘式就是 a 的所有正因之和，而且正整數 a 的正因數個數恰有

【正因數個數定理】 $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$ 個。

例題 1　設小於 220，又整除 220 的所有正整數之和為n。試求小於n，又整除n的所有正整數之和。

【解】將 220 因數分解得到$2^2\times5\times11$。它的所有正因數（排除 220 自己）之和為

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284.$$

將 284 因數分解得到$2^2\times71$。它的所有正因數（排除 284 自己）之和為

$$1+2+4+71+142=220.$$

答案為 220。

像這樣的數 220 與 284 稱為友誼數，早在畢達哥拉斯時就知道這對友誼數。也就是說，正整數a與b是友誼數的意思是

$$\begin{aligned} a &= \text{小於 } b\text{，又整除 } b \text{ 的所有正整數之和；} \\ b &= \text{小於 } a\text{，又整除 } a \text{ 的所有正整數之和。} \end{aligned}$$

處理整數除法問題最犀利的利器為

$$d\mid a, d\mid b \Rightarrow d\mid (am+bn).$$

例題 2　阿三幫他父親記帳，有一則糊塗帳這樣記著：

「哈蜜瓜 37 顆計□4Δ7 元。」

事後，阿三僅知哈蜜瓜每顆為整數元且數字Δ比數字□大。你能知道哈蜜瓜一顆是多少元嗎？

【解】由題意知道

$$\begin{aligned} 37\mid \square4\Delta7 &\Rightarrow 37\mid(1000\square+10\Delta+407) \\ &\Rightarrow 37\mid 37(27\square+11)+(10\Delta+\square) \\ &\Rightarrow 37\mid 10\Delta+\square \\ &\Rightarrow (\Delta,\square)=(3,7),(7,4). \end{aligned}$$

由$\Delta>\square$知道：$\Delta=7,\square=4$。因此哈蜜瓜一顆$\dfrac{4477}{37}=121$元。

例題 3　設n為正整數。試求$3n+5$與$5n+8$的最大公因數（以n表示）。

【解】設最大公因數為d。那麼由$d\,|\,(3n+5)$及$d\,|\,(5n+8)$推得

$$d\,|\,(3n+5)\times(5)+(5n+8)\times(-3)\Rightarrow d\,|\,1\Rightarrow d=1.$$

所以$3n+5$與$5n+8$的最大公因數為 1。

例題 4　一監獄的囚牢剛好排成一列，囚牢編號從$1,2,3,\cdots$下去。起初所有囚牢的門都是關著的，一獄卒依照如下的規矩開關囚牢：「先將所有囚牢的門打開，接著將偶數號囚牢關起來，然後號碼為 3 的倍數的囚牢，如果是關著的就打開，開著的就關閉，接著號碼為 4 的倍數的囚牢，如果是關著的就打開，開著的就關閉，…，依此類推。」試問哪些號的囚牢最後變成開著的。

【解】號碼為完全平方的牢房是開著的。

設n號牢房是開著的。由獄卒的操作法則得知：只有碰到n的因數時才會改變這牢房的開或是關。牢房是開著的意思是指「n有奇數個因數」。如果d是n的一個因數，那麼$\frac{n}{d}$也會是n的一個因數。所以n的因數應該成雙出現。除非有一個n的因數d使得

$$d=\frac{n}{d}$$

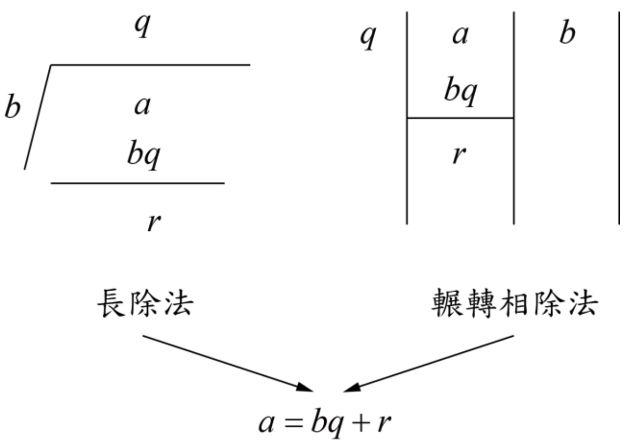
時，n的因數才會是奇數個。這時候

$$n=d^2$$

為完全平方數。

3.2 歐基里德輾轉相除法

設a為整數，b為正整數。國小與國中對『b除a』做了兩種不同的處理方式，一種是「長除法」，另一種是「輾轉相除法」：



它們都是在傳達代數式

【除法原理】　$a=bq+r$　且 $0\le r<b$

的概念。由這個式子出發，可以導出有名的

【輾轉相除法原理】　$(a,b)=(b,r)$。

這個定理稱為歐基里德輾轉相除法，它出現在《幾何原本》第七卷。

例題 5　承例題 3，利用歐基里德輾轉相除法求 $3n+5$ 與 $5n+8$ 的最大公因數。

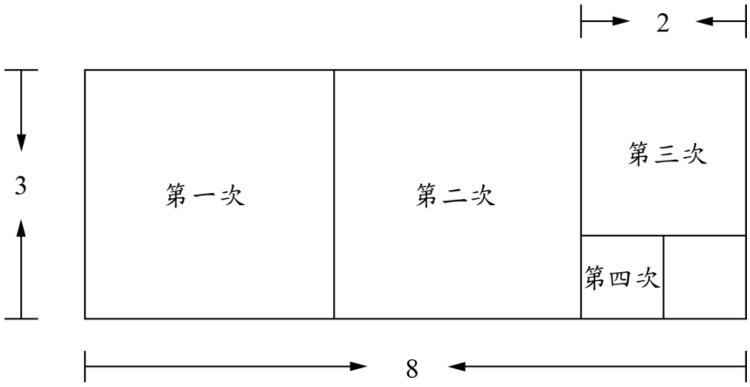
【解】由

		$5n+8$	
	$3n+5$	$3n+5$	1
1	$2n+3$	$2n+3$	
	$n+2$	$n+2$	1
1	$n+1$	$n+1$	
	1	$n+1$	$n+1$
		0	

得到 $3n+5$ 與 $5n+8$ 的最大公因數為 1。

例題 6　項少龍坐著時光機器回到古希臘歐基里德時代，與歐基里德促膝長談。項少龍為了證明他的數學能力，在離去之時，教歐基里德一則切割長方形的遊戲：「給定一個長與寬都是正整數的長方形，起先用刀子割去最大可能的正方形；剩下部分再割去最大可能的正方形；……；如此進行下去，直到最後剩下的長方形是正方形就停止。」

項少龍怕數學不怎麼好的歐基里得不懂他的規則，隨手拿起竹子在地上舉長 8，寬 3 的長方形當例子，解說起來。圖中，第一次、第二次、第三次、第四次所在的正方形即操作過程中先後被割去的最大正方形，最後剩下一個長與寬都是 1 的正方形。



項少龍留給歐基里德的習題為

(1) 開始是長 89，寬 55 的長方形，最後的正方形邊長是多少？

(2) 如果開始的長方形之長為a，寬為b，那麼最後留下的正方形邊長為何？

【解】

(1) 所剩下的長方形之長寬依序為$(89,55)\to(34,55)\to(34,21)\to(13,21)\to(13,8)\to(5,8)\to(5,3)\to(2,3)\to(2,1)\to(1,1)$。最後留下的正方形邊長為 1。

(2) 利用輾轉相除法原理得到：最後留下的正方形邊長為a與b的最大公因數。

3.3 質數問題

「不能分解成兩個大於 1 的正整數的乘積」是質數最重要的特徵，也是它的胎記。相反的，如果n是一個合數，那麼n可以分解成兩個大於 1 的正整數的乘積，較小的那個數不會超過$\sqrt{n}$（如果兩個數都超過$\sqrt{n}$，那麼它們的乘積超過n，不會等於n，矛盾）。所以想要判斷一個大於 1 的正整數n是否為質數，只要用不超過$\sqrt{n}$的質數去試除n就可以知道結果。這是最古老，最直接，也是最簡單的質數判別法-試除法。

『數根』是『質數』的早期名稱，始見於《數理精蘊》這本書，清末數學家李善蘭翻譯《幾何原本》第七卷時，沿用『數根』一詞；民國初年，大陸把它取名為『素數』。與質數相關的中文書籍：李善蘭著有《考數根法》一書，用現在的語言來說，就是判別質

數的方法；大陸數學家華羅庚著有《堆壘素數論》，主要在探討高深的質數問題。無論是『數根』、『質數』或者是『素數』，它們都在強化質數是「數的根本」、「重要的數」或「原始的整數」這些觀念。

例題 7 設 n 為正整數。如果

$$n^4+4$$

是質數，那麼 $n=$？

【解】因式分解得到

$$n^4+4=\left(n^2+2\right)^2-4n^2=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right).$$

因為是質數，所以

$$n^2+2n+2=1 \quad \text{或} \quad n^2-2n+2=1.$$

合理的答案僅有 $n=1$。

例題 8 設 a,b 為正整數，定義線性函數 $f(n)=an+b$。說明

$$f(1), f(2), f(3),\cdots$$

不可能全為質數。

【證明】考慮

$$f(a+b+1)=a(a+b+1)+b=(a+b)(a+1).$$

顯然 $f(a+b+1)$ 是合數。

【註】將 $n=a+b+1$ 代入是很玄的作法。如果從 $f(1)=a+b$ 是否為質數開始討論起，或許你會比較瞭解 $a+b+1$ 是如何得到的。這個例題在告訴我們「線性函數的值不可能都是質數」，更算術的講法是「首項是 b，公差為 a 的等差數列不可能全為質數」。如何造一個公式或函數讓它的值或函數值都是質數，是數學家夢寐以求的事。例如：費馬造了費馬數列 $\langle F_n\rangle$ 為

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

前四項$F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$都是質數，費馬一度認為$F_n$都是質數。不幸的是，尤拉在 1732 年驗證得到

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

不是質數。尤拉發現二次函數$f(n) = n^2 + n + 41$在$n = 0,1,2,\cdots,39$時都是質數，但是$f(40) = 41^2$不是質數。事實上，任何多項式都無法讓它的函數值全為質數，這證明不難，我們將在多項式裡討論它！

「質數有無限多個」這個定理出現在歐基里德《幾何原本》的第九卷。底下的證法就是歐基里德在《幾何原本》上的證明。

定理 3.1 質數有無限多個。

【證明】假設質數只有有限個並將質數依其大小排列如下

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \cdots, p_n。$$

現在考慮正整數$N = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$。因為$N > p_n$，所以$N$不是質數。根據因數分解：$N$必定被某個質數整除，不妨設這個質數為$p_r, (1 \le r \le n)$。因此我們有

$$\begin{cases} p_r \mid p_1 p_2 \cdots p_r \cdots p_n + 1; \\ p_r \mid p_r. \end{cases}$$

由此推得

$$p_r \mid 1.$$

這與$p_r \ge 2$矛盾，所以質數有無限多個。

習題 1 利用試除法判斷 437 是否為質數。

習題 2　700003 與 30007 的最大公因數為 ______ 。

習題 3　考慮下列問題：

(1) 因數分解 1184。

(2) 求

$$\left(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5\right)\left(37^0+37^1\right)$$

之值。

(3) 求 1184 的所有正因數之和。

習題 4　有三個質數，其積是和的 17 倍。求此三質數為何？

習題 5　設 a,b 為正整數，符號 $\max\{a,b\}$ 與 $\min\{a,b\}$ 分別代表兩數中較大與較小的數。例如

$$\max\{3,8\}=8,\ \min\{3,8\}=3,\ \max\{5,5\}=\min\{5,5\}=5.$$

定義數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$ 如下：

$$\begin{aligned}
a_1 &= \max\{a,b\}-\min\{a,b\}\\
b_1 &= \min\{a,b\}\\
a_2 &= \max\{a_1,b_1\}-\min\{a_1,b_1\}\\
b_2 &= \min\{a_1,b_1\}\\
&\vdots\\
a_n &= \max\{a_{n-1},b_{n-1}\}-\min\{a_{n-1},b_{n-1}\}\\
b_n &= \min\{a_{n-1},b_{n-1}\}.
\end{aligned}$$

(1) 如果 $a=8,b=3$，那麼求數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$ 的值。

(2) 針對一般的正整數 a 與 b，寫下 $0,b,b_1,b_2,b_3,\cdots$ 的大小關係。

(3) 針對一般的正整數 a 與 b，考慮數列 $\langle b_n\rangle$ 是否收斂，是的話收斂值為何？

(4) 針對一般的正整數a與b，考慮數列$\langle a_n \rangle$是否收斂，是的話收斂值為何？

(5) 針對一般的正整數a與b，寫下$0,a,a_1,a_2,a_3,\cdots$的大小關係。

(6) 論述此題與例題 6 之關係。

習題 6 設p是一個質數，而且$17p+1$是完全平方數。求p的值。

習題 7 試完成

(1) 設小於 1184，又整除 1184 的所有正整數之和為n。試求小於n，又整除n的所有正整數之和。

(2) 【塔比・伊本・庫拉定理】設n為正整數。

如果正整數

$$p=3\cdot 2^{n+1}-1,\ q=3\cdot 2^{n}-1,\ r=9\cdot 2^{2n+1}-1$$

都是質數，那麼

$$a=2^{n+1}\cdot p\cdot q,\quad b=2^{n+1}\cdot r$$

是友誼數。

習題 8 對任何正整數n，分數

$$\frac{2n+1}{n^2+n}$$

都是最簡分數。

習題 9 設n為正整數。試求$5n^3+11n^2+10n+8$與$5n^2+11n+5$的最大公因數(以n表示)。

習題 10 (最小除法原理)設a為整數，b為正整數。利用『除法原理』推論：可以找到

整數q_1, r_1使得

$$a = bq_1 + r_1 \quad \text{且} \quad -\frac{b}{2} \le r_1 < \frac{b}{2}.$$

並證明此時亦有$(a,b) = (b, r_1)$的性質。

習題 11 給定長度為正整數a與b的兩線段（令$a > b$）。起先，用長度b的線段去量長度a的線段，如果量盡則終止，否則長度a的線段將會剩下一段比b短的線段，將其長度記為a_1。接下來，用長度a_1的線段去量長度b的線段，同理，量盡則終止，不然長度b的線段將會剩下一段比a_1短的線段，將其長度記為b_1。如此繼續操作下，直到最後量盡為止。

(1) 針對特別正整數$a = 8, b = 3$，求$a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots$的值。

(2) 對任意正整數a與b，在量盡之前所用的線段長度是多少（以符號a, b表示）？

習題 12 有 A, B, C 三位先生及 X, Y, Z 三位女士，他們是三對夫妻，約好下班後去一位友人家聚會。六個人分別在路上買了饅頭，買饅頭的規則竟然都是「一個饅頭多少元就買幾個。」

到了友人家之後發現， A 比 X 多買 23 個饅頭， B 比 Y 多買 11 個饅頭，而且每位先生剛好都比他的太太多花 63 元。問：誰與誰是夫妻。

動手玩數學

正整數（或說自然數）雖然是有理數的一部份，但是它具有跟有理數很不一樣的性質。例如集合

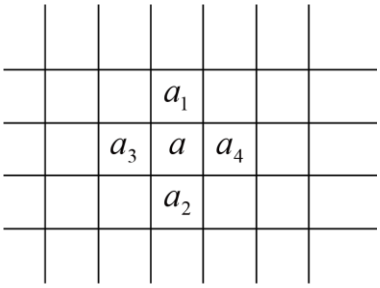
$$\{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \cdots\}$$

是有理數的一部份，但是這集合裡沒有最小元素；而任何由正整數所構成的非空集合裡

一定有最小元素。這「最小元素的存在性」是正整數與有理數的最大差別。底下是一則台大數學系八十六學年度推甄考過的問題，請你試著用上述正整數的性質推理。

在無窮的平面網格上（由無窮多水平線與垂直線所形成），每一格之內放置一個自然數（可重覆），使其每一格的數都等於其相鄰上下左右四格的平均值，即

$$a=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$



<u>張三</u>說：要完成這樣的配置，必須每一格放置相同的正整數。請問：<u>張三</u>的說法正確嗎？請說出你的論證。

挑戰題

數學教授出了一道算術題目給他的兩位學生（學生 P 與學生 S）作答。題目是這樣的：教授先想了兩個介於 2 與 15 之間的整數（含 2 與 15 這兩個數），打電話給 S 告訴他這兩數的和；同時打電話給 P 告訴他這兩數的積（學生 P, S 也都知道這兩個數介於 2 與 15 之間）。兩位學生思索一陣子之後，在電話中有了如下的對話：

學生 P 對學生 S 說：「我不知道你的和是多少？」

學生 S 回答學生 P 說：「我知道你不知道啊！」

學生 P 興奮的對學生 S 說：「現在我知道你的和了，順便提示你一下：我的積超過 28 哦！」

然後就掛了電話。

試求教授想的兩數是多少？

參考文獻

[1] 蔡天新，高斯：離群索居的數學王子⋯寫在《算術講話》發表 200 週年之際，《中華

讀書報》2001 年 7 月 25 日。

數學的女王……數論的習題解答

習題 1

因為$\sqrt{437}<21$，所以只需檢驗小於 21 的質數是否整除 437 即可。結果 19 整除 437，因此

$$437=19\times 23$$

不是質數。

習題 2

利用輾轉相除法可以得到：700003 與 30007 的最大公因數為 37。

習題 3

(1) $1184=2^5\times 37$ 。

(2) 2394。

(3) 2394，將(2)的乘式展開剛好是所有正因數的和。

習題 4

設三質數為a,b,c。由題意知道：$abc=17(a+b+c)$，顯然$17\,|\,abc$，即a,b,c有一數為 17。令$c=17$代入得到：$ab=(a+b+17)$，即$ab-a-b=17$，整理為$(a-1)(b-1)=18$。可能解為$a-1=1,b-1=18;a-1=2,b-1=9;a-1=3,b-1=6;a-1=6,b-1=3;a-1=9,$ $b-1=2;a-1=18,b-1=1$。僅$a=2,b=19$或$a=19,b=2$符合題意。因此三質數為 2, 17, 19。

習題 5

(1) $a_1=5,a_2=2,a_3=1,a_4=1,a_5=0,a_6=a_7=\cdots=1$；$b_1=3,b_2=3,b_3=2,b_4=1,b_5=1,$

$b_6=b_7=\cdots=0$。

(2) $b\ge b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_n\ge\cdots\ge 0$。

(3) 數列$\langle b_n\rangle$收斂到 0。

(4) 數列$\langle a_n\rangle$收斂到(a,b)。

(5) $a_1,a_2,a_3,\cdots$中恰有一項為 0，其餘都是正整數；在 0 這項之前是遞減數列，在 0 這項之後都是常數項，常數為(a,b) 。

(6) 都是「輾轉相除法原理」的呈現方式。

習題 6

設$35\le 17p+1=q^2$。因此$q>5$且$17p=(q-1)(q+1)$。由算術基本定理知道：

$q-1=17, q+1=p$或$q-1=p, q+1=17$。解得$p=19$或 15（不合）。

習題 7

(1) 因為$1184=2^5\times 37$，所以習題 3

$$n=2394-1184=1210=2\times 5\times 11^2.$$

小於 1210，又整除 1210 的所有正整數之和為

$$\left(2^0+2^1\right)\left(5^0+5^1\right)\left(11^0+11^1+11^2\right)-1210=1184.$$

(2) 小於a，又整除a的所有正整數之和為

$$\begin{aligned}&\left(2^0+2^1+\cdots+2^{n+1}\right)\left(p^0+p^1\right)\left(q^0+q^1\right)-a\\&=\left(2^{n+2}-1\right)\times 3\cdot 2^{n+1}\times 3\cdot 2^n-2^{n+1}\cdot p\cdot q\\&=b.\ (\text{將上式乘開可得})\end{aligned}$$

同理，小於b，又整除b的所有正整數之和為a。因此a與b是友誼數。

習題 8

設 $d=(2n+1,n^2+n)$。因為 $d\,|\,(2n+1), d\,|\,(n^2+n)$，所以

$$d\,|\,(2n+1)\times(-n)+(n^2+n)\times(2)\Rightarrow d\,|\,n.$$

再利用 $d\,|\,(2n+1), d\,|\,n$ 得到 $d\,|\,(2n+1)\times(1)+n\times(-2)$，即 $d\,|\,1$。因此 $d=1$，也就是 $2n+1$ 與 n^2+n 互質。

習題 9

利用輾轉相除法

$$\begin{aligned}
\left(5n^3+11n^2+10n+8\right)&=\left(5n^2+11n+5\right)\left(n\right)+\left(5n+8\right)\\
\left(5n^2+11n+5\right)&=\left(5n+8\right)\left(n\right)+\left(3n+5\right)\\
\left(5n+8\right)&=\left(3n+5\right)\left(1\right)+\left(2n+3\right)\\
\left(3n+5\right)&=\left(2n+3\right)\left(1\right)+\left(n+2\right)\\
\left(2n+3\right)&=\left(n+2\right)\left(1\right)+\left(n+1\right)\\
\left(n+2\right)&=\left(n+1\right)\left(1\right)+\left(1\right)\\
\left(n+1\right)&=\left(1\right)\left(n+1\right)+0
\end{aligned}$$

得到 $5n^3+11n^2+10n+8$ 與 $5n^2+11n+5$ 的最大公因數是 1（兩數互質）。

習題 10

利用『除法原理』可以得到

$$a=bq+r \quad 且 \quad 0\le r<b.$$

如果此時的餘數 r 滿足 $0\le r<\frac{b}{2}$，那麼取 $q_1=q, r_1=r$ 即可。若餘數 r 滿足 $\frac{b}{2}\le r<b$，則 $\frac{-b}{2}\le r-b<0$ 且

$$a=bq+r=b(q+1)+r-b.$$

取 $q_1=q+1, r_1=r-b$ 即可。

習題 11

關於(1)：$a_1 = 2, b_1 = 1$。

關於(2)：(a,b)。

習題 12

設先生買m個饅頭，太太買n個饅頭。依題意得到方程式

$$m^2 - n^2 = 63 \Rightarrow (m-n)(m+n) = 3^2 \times 7$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} m-n & 1 & 3 & 7 \\ \hline m+n & 63 & 21 & 9 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} m & 32 & 12 & 8 \\ \hline n & 31 & 9 & 1 \end{array}$$

因此，男士買的饅頭數為 8, 12, 32，而女士買的饅頭數為 1, 9, 31。令$a,b,c;x,y,z$ 分別為 A, B, C; X, Y, Z 買的饅頭數。由 A 比 X 多買 23 個饅頭， B 比 Y 多買 11 個饅頭得到

a	b	c	x	y	z
32	12	8	9	1	31

再由三組解 (32,31), (12,9), (8,1)得知：A, Z 是夫妻；B, X 是佳偶；C, Y 是一對。

動手玩數學參考解答

每方格都填同一個正整數時，顯然是可行的。底下說明這是唯一的一種填法：如果有一種填法可以滿足題目所要求的，那麼填進方格的所有正整數中有一個是最小的，令它為a。考慮數字為a那格的上、下、左、右四方格。因為a是最小的，所以

$a \le a_1, a \le a_2, a \le a_3, a \le a_4$。若$a_1 > a$，則

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} > \frac{a+a+a+a}{4} = a \quad (\text{矛盾})。$$

所以$a_1 = a$，同理可推得$a_2 = a_3 = a_4 = a$。用同樣的方法知道：每格所填的數字必須是a。

挑戰題參考解答

設 p 代表教授電話中告訴學生 P 的乘積；s 代表教授電話中告訴學生 S 的和。由第一句話得到:「 p 至少是三個不超過 15 的質數（可以相同）的乘積」;由第二句話得到:「 s 不可以是兩個不超過 15 的質數的和」（如果是兩個不超過 15 的質數的和，那麼學生 P 是有可能知道的）。因此 $4=2+2,\ 5=2+3,\ 6=3+3,\ 7=2+5,\ 8=3+5,\ 9=2+7, 10=5+5,$ $12=5+7,\ 13=2+11,\ 14=7+7,\ 15=2+13,\ 16=3+13,\ 18=5+13,\ 19=2+17,\ 20=3+17,$ $21=2+19, 22=5+17,\ 24=5+19,\ 25=2+23,\ 26=3+23,\ 28=5+23,\ 30=7+23$

都不可能為 s 的值。因此 $s=11,17,23,27,29$。當 $s=29$ 時，有可能

$s=14+15, p=14\times 15=210$，此時 210 的分解僅此一種，學生 P 應該不敢講第二句話。同理，當 $s=27=13+14, s=23=11+12, s=17=6+11$ 時也發生同樣的情況。因此可以確定 $s=5+6=4+7=3+8=2+9$，此時 $p=30,28,24,18$。根據第三句話，$p=30$。解得：教授想的兩數是 5 與 6。