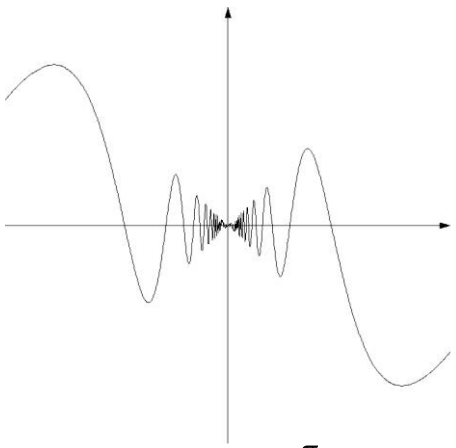
2 函數之美



$$f(x) = x\cos\frac{\pi}{x}$$

函數之美

就像達爾文的「物競天擇，適者生存」的理論，數學上的新觀念，大部份都是經過長期的醞釀，演化而來，函數就是一個最好的例子。德國數學家萊布尼茲在 1694 年首先提到函數（function）這個字眼，這也是函數一詞最早出現在數學文獻裡的紀錄。至於 $f(x)$ 作為一般函數的符號是在 1734 年時，瑞士數學家尤拉首先採用的。說也奇怪， function 在字典上是『起作用』的意思，但是在 1859 年時，清末數學家李善蘭卻將 function 一字中譯為『函數』這麼奇怪的名詞。事實上，李善蘭的譯法是很有數學深意的：意指將變數 x 放入 f 內，讓它起作用製造出新變數 $f(x)$。

『函』這個字在日本是屬於不常用的漢字，所以日本人叫『函數』為『關數』(取音相近)：大意是指「有關係的數」或「將變數 x 關入 f 內，讓它起作用製造出新變數 $f(x)$」的意思。

接下來我們將對函數的孕育，誕生，到廣泛被使用作較詳細的介紹，並列舉生活中常見的函數。現在就讓我們來一趟欣賞「函數之美」的旅程吧！

2.1 函數的孕育，誕生，到廣泛被使用

函數觀念的產生，也經過一段很崎嶇的途徑。早在古希臘時期，就有兩個變量互相對應的觀念。只是當時所指的量，也僅僅是幾何性質的量，這時期算是函數概念的孕育時期。函數概念的雛形開始出現在中世紀一些數學家的研究中，他們用幾何與運動的概念來描述函數。就以建立座標系與解析幾何的法國數學家笛卡爾來說，他在《幾何學》中討論方程式與曲線的聯繫時，已經意識到：當『點』按一定的條件運動時，x 與 y 之間便建

立了某種對應關係，即 y 依賴 x 而變，或者說 y 是 x 的函數。再以伽利略來說，他研究自由落體運動時發現「物體在空中下降的距離（從靜止開始計算）與所經過的時間的平方成正比」。也就是說他發現了距離與時間之間的對應關係。用現在的說法就是：距離是時間的函數。

設 x, y 是兩個變數。當變數 y 的值，依照某個對應規則 f，隨著變數 x 的變化而唯一確定時，我們就說「y 是 x 的函數」，用記號 $y = f(x)$ 表示。這是 1718 年，萊布尼茲的徒弟約翰•白努利在沒有使用幾何與運動語言的情形下，給函數下的定義。這也是現在中學數學課程中，最常給的具體定義之一。

之後，約翰•白努利的得意門生尤拉，對函數作了如下的定義：

「根據它量而變的量，稱為函數。」

在 1837 年，德國數學家狄利克雷對函數作了如下的定義：對於每個確定的 x 值，只要 y 有完全確定的值與之對應，不論 x, y 所建立的對應方式如何，y 都叫做 x 的函數。狄利克雷舉了一個函數的例子（稱為有理數的特徵函數）：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{當 } x \text{ 是有理數}, \\ 0 & \text{當 } x \text{ 是無理數}. \end{cases}$$

當你試著去畫這函數的圖形時，就會覺得這真是一個怪理怪氣的函數，它的圖形根本畫不出來。對於將函數的定義定為「兩個數集之間的對應關係」而言，狄氏的定義是很恰當的。函數定義的再進一步發展，恐怕是德國數學家康德創立集合論之後的事了。

在 1887 年，德國數學家戴德金把函數的定義提昇到更抽象的層次：給定兩個集合 A 與 B。如果 A 內每一個元素 a，在 B 內恰有一個元素 b 與 a 對應，那麼這種對應規則 f 稱為從 A 映到 B 的函數，記作 $f: A \to B$，並將 a 與 b 的關係用符號 $b = f(a)$ 或 $a \mapsto b$ 表示。習慣上，稱 A 是函數 f 的定義域，B 是函數 f 的對應域，集合 $\{f(a) \mid a \in A\}$ 是函數 f 的值域。根據戴德金的觀點，「三角形的面積」就是一個函數，它定義在所有三角形所構成的集合上，而取值於正數所構成的集合；「螞蟻在地上跑」也是一個函數，它定義在「時間」這集合上，而取值於平面上的點所構成的集合。把函數視為集合與集合之間的對應關係後，數學家創造了許多稀奇古怪，奇形異狀的函數，有「魔鬼的階梯」、「長滿刺的曲線

（一說連續而到處沒有切線的曲線）」等函數。實在看不下去的法國大數學家龐加萊就寫道：「從前人們找尋新函數都是為了某些實用的目的。現在呢？新函數的發掘，只是要指出我們前輩的理論上的漏洞」。但是後來的科學發展，證明龐加萊的說法是錯誤的。在物理上，幾乎所有的質子作布朗運動時，它的軌跡都是「長滿刺的曲線」，這是美國的數學家維納證明的。

2.2 自然界的函數

從伽利略的自由落體實驗得到啟示：我們的自然界處處存在值得探討的函數。在這節裡，將重點放在「彈簧伸縮與反作用力」、「攝氏與華氏」、「地震規模與釋放能量」的函數。

例題 1　(虎克定律)在 1678 年，虎克發現了所謂的「虎克定律」：彈簧由自然長度伸展（或壓縮）x 單位長時產生的反作用力 $f(x)$ 與 x 成正比，即 $f(x)=kx$（k 是彈性常數）。這告訴我們彈簧伸縮的長度與反作用力成正比。

「登高才能看得遠」是大家都知道的原理，這原理與地球是個球體息息相關。「站在高度為 x 公尺高的地點，所能眺望的最遠距離 $f(x)$（公里）為何？」是人們想要瞭解的一個函數。事實上，函數 $f(x)$ 可表示為

$$f(x)=8\sqrt{\frac{x}{5}}.$$

例題 2　大家所熟知的黃鶴樓高度約為 51.2 公尺。試問：站在黃鶴樓所能眺望的最遠距離是幾公里？

【解】代入公式得到

$$f(51.2)=8\sqrt{\frac{51.2}{5}}=8\times 3.2=25.6\,(\text{公里})。$$

例題 3　(攝氏與華氏的關係)溫度的高低可以用攝氏表示，也可以用華氏表示。好一點的溫度計會在左右兩邊分別刻上攝氏與華氏的刻度。攝氏零度時，等於華氏 32 度；攝氏 100 度時，等於華氏 212 度。試求攝氏度數與華氏度數的函數關係。

【解】設攝氏 x 度時，等於華氏 $f(x)$ 度，即 $f(0)=32, f(100)=212$。由比例關係知道

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(100)-f(0)}{100-0}=\frac{212-32}{100-0}=\frac{9}{5}.$$

因此

$$f(x)=\frac{9}{5}x+f(0)=\frac{9}{5}x+32.$$

搞笑諾貝爾獎是由美國《不可能的科學研究年報》雜誌所主辦，它的評獎標準是「不能或不應被複製」。2002 年第 12 屆搞笑諾貝爾數學獎頒給兩位印度學者，他們因一篇名為《修訂測量大象的體表面積公式》的文章而得獎。

例題 4　(大象體表面積公式)大象的體表面積 S（平方公尺）可以用數學式子

$$S=a+bH+cT$$

來表示，這裡的 H 是指大象的身長（公尺），T 是指大象的體重（公頓）；而常數 a,b,c 與大象生長的環境相關（如印度象與緬甸象的常數可能不會一樣）。如果印度象的理想常數為 $a=-4, b=1.6, c=4.5$，那麼我們來估算一下台北市立動物園的鎮園之寶-大象林旺爺爺（已於 2003 年 2 月 26 日病逝，金氏世界記錄追認牠為全世界最老的象瑞，牠是長期生長在台灣的緬甸象）的體表面積。大象林旺的身長約為 3.5 公尺，體重約為 5.6 公噸，依據體表面積公式得到大象林旺的體表面積為

$$S=-4+1.6\times3.5+4.5\times5.6=26.8\,(平方公尺)。$$

2.3 數學家與音樂家創造的函數

<u>萊布尼茲</u>說：「音樂是一種隱藏的算數練習，透過潛意識的心靈跟數目字打交道」。只要是音樂，他就是時間與數字（震動頻率）的一種對應函數。

例題 5　巴松管（一種低音樂器）的音樂頻率可以用函數

$$\begin{aligned} P(t) = -0.25 &+ 0.32\cos 2\pi t + 0.04\sin 2\pi t \\ &+ 0.6\cos 4\pi t + 0.2\sin 4\pi t \\ &+ \cos 6\pi t + \sin 6\pi t \\ &+ 0.2\cos 8\pi t + 0.3\sin 8\pi t \\ &+ 0.2\cos 10\pi t + 0.1\sin 10\pi t \end{aligned}$$

來模擬。這裡的 t 是時間，$P(t)$ 是震動頻率。

例題 6　定義函數 $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ 如下

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}.$$

試求此函數的值域。

【解】因為 $1\le x\le 2$，所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{x-1}\right)^2} \\ &= \left(1+\sqrt{x-1}\right)+\left(1-\sqrt{x-1}\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

因此函數 $f(x)$ 是一個常數函數。

接下來的問題是牛頓提出的，所以叫做牛頓問題。

例題 7　(牛頓問題)有一片牧場的草，二十七頭牛六星期可以吃完，二十三頭牛九星期可以吃完。如果是二十一頭牛，那幾星期可以吃完？（假定牧場的草是邊吃邊長的，而且每天成長的量一定）。

【解】設原先牧場的草總量為 1 單位，每隔一星期增加 m 單位。因此第 t 週之後，牧場的草總量函數 $f(t)$ 為

$$f(t)=1+mt.$$

每頭牛每星期能吃的草總量為

$$\frac{f(6)}{27\times 6}=\frac{f(9)}{23\times 9}\Rightarrow m=\frac{5}{24}\text{ (單位)。}$$

因此，每頭牛每星期能吃的草總量為

$$\frac{f(6)}{27\times 6}=\frac{1}{72}\text{ (單位)。}$$

由

$$\frac{1+\frac{5t}{24}}{21\times t}=\frac{f(t)}{21\times t}=\frac{1}{72}$$

得到 $t=12$ 星期。

若 x 是一個實數，則高斯符號 $[x]=$ “不超過 x 的最大整數”。例如

$$[3.141]=3,\ [-2.78]=-3,\ [\sqrt{5}]=2,\ [7]=7.$$

高斯函數在數論上是一個很有用的函數。以生活中的數學來講，用它來描述「計程車車資與里程的關係」再恰當不過了。

例題 8 (計程車車資與里程的關係)某市的計程車車資與里程的關係訂為：不超過 3 公里，車資一律為 80 元，超過 3 公里的部分，每半公里加收 5 元（不足半公里部分不計費）。今以函數 $f(x)$ 代表搭乘 x 公里路程所需支付的計程車車資。如果將函數 $f(x)$ 表為

$$f(x)=\begin{cases}80 & x\le 3,\\ a+b\left[\dfrac{x-c}{0.5}\right] & 3<x.\end{cases}$$

求實數 a,b,c 的值。

【解】答案是 $a=80,b=5,c=3$。思路是這樣的：$a=80$ 代表基本費用，$b=5$ 代表高斯符號為「超過里程，除以 0.5 的整數部分」。因此 $c=3$ 才合理。

2.4 與函數一線之隔的公式

當一則函數很出名的時候，常常冠以公式之名，而不在稱它為函數。例如，以人體的理想體重公式為例：一個人身高為 h 公尺的人，他的理想體重 $w(h)$（公斤）以

$$w(h)=22h^2$$

當標準值較適當。因為大多數的醫師都以這函數“$w(h)$”當體重是否過重的標準，所以就稱 $w(h)$ 為人體的理想體重公式（而不稱它為理想體重函數）。又如例題 4 中的大象體表面積公式也是同樣的道理。

習題 1　某出版社欲發行許教授《算數講義》這本書，訂定的契約如下：「書本定價為 200 元，銷售在 1 千本（含）內，許教授可得 10 萬元；超過 1 千本，而在 2 千本（含）內的部分，每本給定價 15% 的版稅；超過 2 千本的部分，每本給定價 25% 的版稅。」設銷售 x 本時，許教授可得到的總錢數函數為 $f(x)$ 元。許教授認為函數 $f(x)$ 可表示為

$$f(x)=\begin{cases}100000 & 0\le x\le 1000,\\ a+bx & 1000<x\le 2000,\\ c+dx & 2000<x.\end{cases}$$

求 a,b,c,d 的值。

習題 2　兩點 $x(0\le x\le 30)$ 分時，時針與十二點鐘的方向夾 $f(x)$ 度；分針與十二點鐘的方向夾 $g(x)$ 度。

(1) 求函數 $f(x)$ 與 $g(x)$。

(2) 試問：兩點幾分時，時針與分針會重合在一起。

(3) 如果兩點 $x(0\le x\le 30)$ 分時，時針與分針的夾角為 $h(x)$ 度，那麼將函數 $h(x)$ 表為

$$h(x)=\begin{cases}a+bx & 0\le x\le c,\\ d+ex & c\le x\le 30.\end{cases}$$

求 a,b,c,d,e 的值。

習題 3　繪函數

$$f(x)=x-[x]$$

的圖形。

習題 4　指出「三角形的內切圓半徑」這個函數的定義域、對應域與值域各為何？

習題 5　在牛頓問題中，如果是十八頭牛，那幾星期可以吃完？

習題 6　伽利略的自由落體運動：「從靜止開始計算，物體經過 t 秒後，在空中下降的距離為 $4.9t^2$ 公尺」。在伽利略年代並沒有時鐘（時鐘是伽利略後來發明的），伽利略以自己的脈搏來計時。如果伽利略的脈搏每分鐘跳 72 次，那麼伽利略的脈搏跳動 x 次時，物體下降的距離設為 $f(x)$ 公尺。試求函數 $f(x)=$？

習題 7　約略描繪（或想像一下）函數

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x} & x\neq 0, \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

的圖形。

同餘數函數

「同餘數」是一個既古老且困難的函數概念，直到今日，這個函數的值域還不很確定。這函數正確且完整的敘述應該是「三邊邊長是有理數，而且面積是正整數的直角三角形之面積」。由此知道：這函數的定義域為「所有三邊邊長是有理數，而且面積是正整數的直角三角形所構成的集合」；對應域為「正整數所構成的集合」。最困難的當然是值域，哪些正整數是同餘數，哪些不是一直是困擾著數學家的大難題。例如：$1,4,9,\cdots$ 等完全平方數就不在值域內（不是同餘數）。

函數之美的習題解答

習題 1

關於a,b的值：若$2000<x$，則

$$f(x)=100000+10000\times 15\%\times 200+(x-2000)\times 25\%\times 200=30000+50x.$$

因此$a=70000, b=30$。

關於c,d的值：若$1000<x\le 2000$，則

$$f(x)=100000+(x-1000)\times 15\%\times 200=70000+30x.$$

因此$c=30000, d=50$。

習題 2

(1)

$$f(x)=2\times\frac{360}{12}+\frac{x}{60}\times\frac{360}{12}=60+\frac{x}{2},$$
$$g(x)=\frac{360}{60}\times x=6x.$$

(2) 由

$$60+\frac{x}{2}=6x\Rightarrow x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$$

知道：2 點$10\frac{10}{11}$分時，時針與分針會重合在一起。

(3) 時針開始走在分針之前。因為分針走的快，由(2)知在 2 點$10\frac{10}{11}$分時追平。因此，

$c=10\frac{10}{11}$。在$10\frac{10}{11}$分之前，

$$h(x)=f(x)-g(x)=60-\frac{11}{2}x,$$

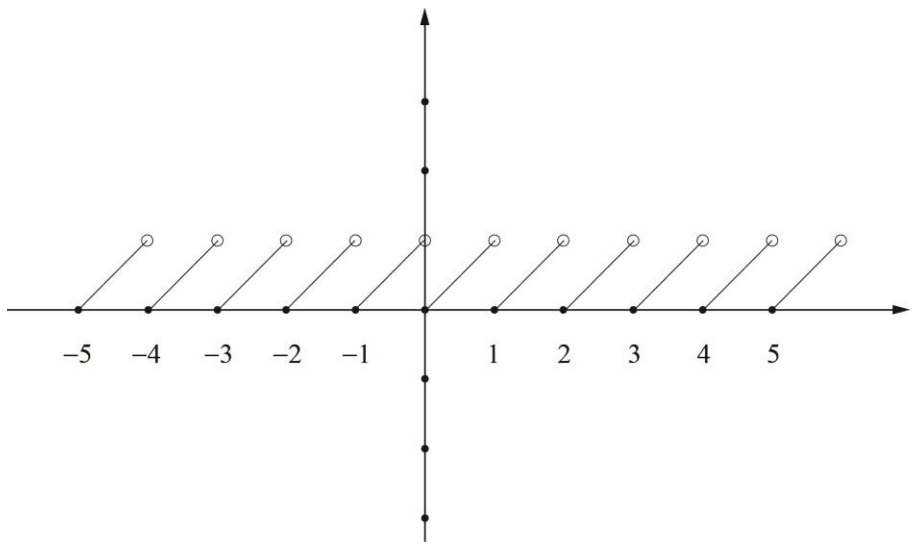
即$a=60, b=-\frac{11}{2}$。

在$10\frac{10}{11}$分之後，

$$h(x)=g(x)-f(x)=\frac{11}{2}x-60,$$

即 $d=-60, e=\frac{11}{2}$ 。

習題 3



【註】當 $x\geq 0$ 時，另一種等價的意思是“$f(x)=x$ 的小數部分”。

習題 4

定義域 =「各種三角形所構成的集合」；
對應域 =「實數所構成的集合」；
值域 =「正實數所構成的集合」。

習題 5

在例題 7 中，每頭牛每星期吃草總量 $\frac{1}{72}$，而每隔一星期草增加 $\frac{5}{24}$。假設 x 星期後，草會被吃完。

$$1+\frac{5}{24}x=\frac{1}{72}\times 18\times x \Rightarrow x=24.$$

答案為 24 星期。

習題 6

$$f(x)=4.9\left(\frac{5x}{6}\right)^2。$$

習題 7

它的圖形就是這節的圖騰（第一頁開始的圖形）。