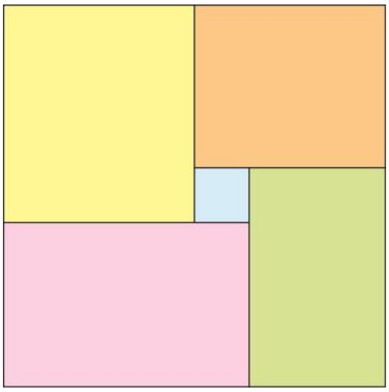
1 數學詩篇的創造者……集合與邏輯



五個小正方形可以拼成一個大正方形嗎？

數學解題的首要任務就是要確定研究的對象與探討的範圍。為了釐清研究的對象與探索問題的範圍，我們需要制訂一個暨好用、又方便的名詞，於是「集合」一詞便誕生了。自從德國數學家康德於 1871 年給出集合的定義之後，現在的數學問題大多使用集合這個概念來描述與思考。有了集合這道工具，接下來的數學思維就較有系統了。

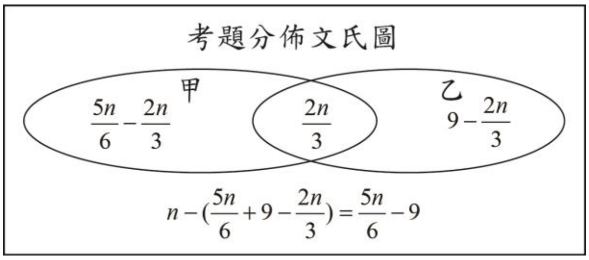
數學思維的開端便是如何去陳列或佈置問題所產生的集合，讓我們看了之後賞心悅目，易於掌控，方便思維及解題。基本上，欲達到這樣的目的，我們習慣上會活用「文氏圖」或「數學表格」來闡釋所碰到的集合。因此，能夠巧繪文氏圖或者妙製數學表格便是踏出成功解題的第一步。

1.1 集合與巧繪文氏圖、妙製數學表格的能力

在這小節裡，我們將舉例說明：有些數學問題所產生的集合，在巧繪成文氏圖之後，有如探囊取物般，輕易的解決了；而有些集合，在妙製的數學表格下，有如神來一筆，立刻撥雲見日。

例題 1　甲，乙兩學生參加同一數學考試，甲做錯全部試題的六分之五；乙做錯九題。試後兩人核對一下試卷，有三分之二的題目兩人同時做錯。問那次數學考試共出了幾道題目。

【解答】設試題共有 n 題，巧繪文氏圖如下：



由

$$\begin{cases} \dfrac{2n}{3} \text{ 為整數} \\ 9-\dfrac{2n}{3}\geq 0 \\ \dfrac{5n}{6}-9\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\,|\,n \\ 10.4\leq n\leq 13.5 \end{cases}$$

推得 $n=12$。所以那次數學考試共出了 12 道題。

例題 2　甲乙丙丁戊五個小朋友原來在同一所幼稚園,現在他們都上小學了,分別在 A、B、C、D、E 五所學校。提示 :

1.丙丁不在 A 學校上學。

2.甲丁不在 D 學校上學。

3.丙和戊與在 E 學校上學的小朋友住在同一棟樓裡。

4.丙經常和在 B 學校上學的小朋友一起做作功課，有時乙也在。

5.甲和丙有空時，就找在 A、C 上學的小朋友一起玩。

6.而且，丁和戊經常到 B 學校玩。

7.但是，在 E 學校上學的小朋友從來不到 B 學校去玩。

將這五個人的名字和學校，連接起來！

【解答】妙製如下學生與學校的數學表格：表格中序對（A, 丙）的格子數字 1 代表提示 1. 告訴我們：丙不是讀 A 學校。其餘以此類推。

學校\學生	甲	乙	丙	丁	戊
A	5		1	1	∨
B	∨	4	4	6	6
C	5		5	∨	
D	2		∨	2	
E		∨	3	6+7	3

由此妙製的表格得知：丙讀 D 學校，丁讀 C 學校。戊可能讀 A、C、D 學校，但由丙、丁讀的學校知道：戊讀 A 學校。同理，乙讀 E 學校，甲讀 B 學校。

1.2 邏輯推理與論證能力

邏輯是一門推理的科學，是我們推導公式、證明定理時思考推理的依據。既然是推理的科學,它應該包括所有可能的推理方式,不過由於希臘學者關於演繹幾何學的偉大發現，使得亞里斯多德在創立邏輯時，過於偏重演繹推理方面。這也使得高中的邏輯入門介紹時，經常舉幾何學上所學過的例子或理論作為說明，一來是歷史使然，二來是國中時學過一點演繹幾何學，學生容易理解。至於現代數理邏輯則是布爾在 1854 年，所著的書《思維規律》中開始研究的，歷經五十餘年的研究，最後由英國邏輯學家、哲學家羅素集大成於《數學原理》裡。

人類的心靈是一個既神秘又奧妙的機構，邏輯學就是為了呈現心靈中的思考與推理，並將它表達出來，與外人分享、溝通及交流的一門科學。邏輯原本是哲學的一分支，在布爾將邏輯學代數化之後，邏輯早已成為數學的一個重要領域。邏輯對科學與數學的重要性可以由愛因斯坦的名言「純數學成為邏輯思想的詩篇」，托爾斯泰的名言「邏輯與數學是科學的雙眼」及巴斯卡的名言「人只不過是一根蘆葦，是自然界最脆弱的東西，但他是一根有思想的蘆葦」得到佐證。

在數學的邏輯推理上，最常使用的莫過於「若…，則…」這類數學命題。就以「若前提敘述 P，則結論敘述 Q」這則命題來說，當此數學命題為真時，我們習慣用符號

$$P \Rightarrow Q$$

來表示。

例題 3　國安局接到二名我方間諜從敵後傳回來的消息，這個消息包含有四句話，分別以W、X、Y、Z為代號。據最近被射殺的我方間諜生前的報告指出，這二名間諜有一人是雙面諜，他可能會說謊。是否能判斷哪位是雙面諜，並由傳回來的報告判定哪幾句話是真的？

間諜 A 報告：

W、X、Y　　只有一句話是真的,　　(1)

X、Y、Z　　只有一句話是真的,　　(2)

W、Z　　只有一句話是假的.　　(3)

間諜 B 報告：

W、X、Y　　只有一句話是真的,　　(4)

X、Y、Z　　只有一句話是真的,　　(5)

W、Y、Z　　只有一句話是真的.　　(6)

【解答】從間諜 A、B 的報告看出(1),(2)和(4),(5)的陳述都一樣，且知至多一人會說謊，所以(1),(2),(4),(5) 一定是真話，問題一定出在(3)和(6)。首先，我們來看間諜 A。從(3)看出W、Z只有一句話是假的：先假設W為假，則Z為真，代入 (1)則X、Y有一為真；代入 (2) 則X、Y是假的，矛盾。所以假設W為假不成立。再假設Z為假，則W為真，代入(1)則X、Y為假。代入 (2)，則Z為真，矛盾。所以假設Z為假亦不成立。綜合前面的分析發現，間諜 A 根本在第(3)句話說謊，可判定其為雙面諜。現在由於第 (4),(5), (6)句話是真話，所以容易知道：只有Y這句話才是真的。

針對數學命題

$$「敘述 P \Rightarrow 敘述 Q。」$$

數學邏輯提供我們兩種推理論證這則命題的方法，第一種叫做「直接證法」，它就是使用敘述P的已知內容及一般邏輯知識來推導敘述Q。有時候，直接證法不易使用，我們必須改弦易轍，採取一種叫做「反證法」的推理論證模式。在闡釋什麼是反證法之前，

先舉一則與反證法相關的問題。問題是這樣的：當有人誣賴指控“你是小偷”時，為了洗刷你的冤情，你必須去推理或論述

「我不是小偷」

這則命題成立，否則可能會有牢獄之災。如果是採取直接證法來陳述「我不是小偷」，那所能作的事情便是對著法官大喊

大人啦！冤枉喔，我絕對不是小偷。

這樣不可能讓法官相信你不是小偷。試想，如果換個方式，先承認「我是小偷」。那麼可以推得別人遺失東西當時，你應該在現場。如果你能舉證不在場的證明，那麼「我是小偷」的假設便不成立。這樣反而可以洗刷冤情。

像這樣，為了推理論證命題

「敘述$P \Rightarrow$ 敘述Q」

成立。先假設敘述Q不成立，再逐步推得敘述P亦不成立的論證模式就稱之為「反證法」。

例題 4　證明：方程式$y^2+y=2x^3+1$沒有整數解。

【證明】採取「我不是小偷」的反證法模式，假設方程式有整數解x與y。那麼等式的左邊

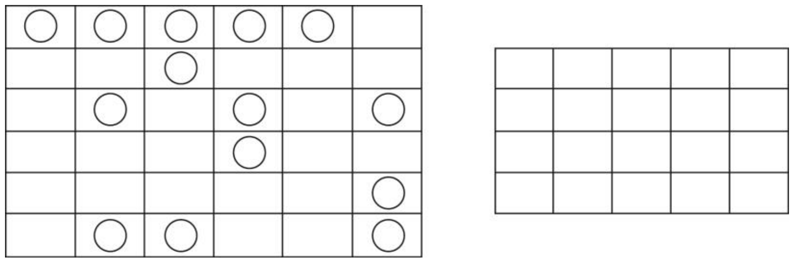
$$y^2+y=y(y+1)$$

是連續兩個整數的乘積，所以必定是個偶數。然而等式的右邊

$$2x^3+1$$

是整數的兩倍再加上 1，必是奇數。因為左右邊的奇偶性不合，方程式有整數解的假設是錯誤的，此方程式應該沒有整數解。

例題 5　如下圖，左圖中，每一行與每一列的圓圈數都是奇數；在右圖中，是否可以填入幾個圓圈使得每一行與每一列的圓圈數也都是奇數。



【解】答案是不可能的。假設可以的話，則令r_i代表第i列的圓圈數；c_j代表第j行的圓圈數。因為填入的圓圈數等於

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4,$$

也等於

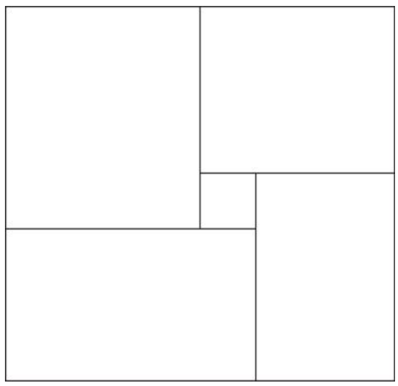
$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5.$$

將它繪製如下表：

					r_1
					r_2
					r_3
					r_4
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	$c = r$

因為限制r_i, c_j都是奇數，所以r是偶數，但是c是奇數。這與$r = c$矛盾。因此「假設可以」是錯誤的。

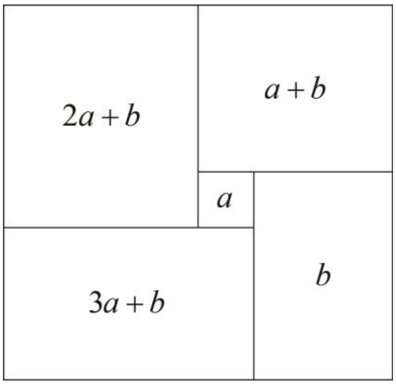
例題 6　在下圖中，五個小矩形圍成一個大矩形。



如果相關位置不改變，那麼可否用五個正方形圍成一個大矩形呢？

【證明】假設有五個小正方形可以圍成大矩形，並令中央及右下角的正方形邊長為a與

b。依逆時鐘方向將其餘三個小正方形的邊長以a,b來表示。



因為圍成大矩形，所以左側的高等於右側的高，即

$$(3a+b)+(2a+b)=b+(a+b)\Rightarrow a=0,$$

矛盾。

習題 1 在一個偏遠山區的學校裡，有一個年級，由甲、乙、丙三位老師教授數學、物理、化學、生物、國文、歷史六科，每位老師教兩科。

1.化學老師和數學老師住在一起。

2.甲老師是三位老師中最年輕的。

3.數學老師和丙老師是優秀的兩位象棋國手。

4.物理老師比生物老師年長，比乙老師年輕。

5.三人中最年長者的住家比其他兩位老師的住家都遠。

請問：哪位老師教哪門課？

習題 2 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八人參加兩週的登山旅行，其中四人在第一週時組成溯溪隊，另四人則走山路。一週結束時八人會合後，將再分隊進行第二週的旅行，同樣還是四個人溯溪，四個人走山路。分隊方式必須遵守下面限制：

(a) 第一週，庚不和辛同一隊。

(b) 第二週，庚和辛兩人都參加溯溪隊。

(c) 在這兩週的旅行，如果甲走山路，那麼丁也會加入山路組。

(d) 在這兩週的旅行，丙和戊總在同一組。

思索下列問題：

1.第一週時哪些人可能在溯溪組呢？

(1) 甲乙丁辛　(2) 甲丁戊己　(3) 乙丙己庚　(4) 乙丁庚辛　(5) 乙己庚辛

2.如果第二週時，戊參加溯溪組，那麼同一週內走山路的隊伍有哪些人？

(1) 甲乙丙己　(2) 甲乙丁己　(3) 乙丙丁己　(4) 乙丙己辛　(5) 丙丁庚辛

3.如果第一、二週己、庚都不同隊，則己和那個人恰好其中一週會同隊？

(1) 甲　(2) 乙　(3) 丁　(4) 戊　(5) 辛

4.如果第一週時丙在山路組，那麼同一週時，誰一定在溯溪組？

(1) 甲　(2) 乙　(3) 戊　(4) 己　(5) 庚

5.如果恰有兩人在第一週結束時改變組別，有可能是哪兩個人？

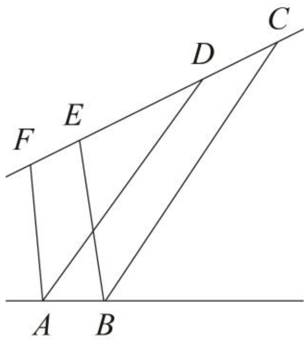
(1) 乙丁　(2) 乙己　(3) 丁己　(4) 丁辛　(5) 庚辛

習題 3　下列Ⅰ至Ⅲ為有關右圖的一些條件。在下列的各個選項中，選出用該選項的條件，即可推得「四邊形 $ABCD$ 與 $ABEF$ 的面積相等」的結論？

Ⅰ　$AB//CF$

Ⅱ　$AD//BC$ 且 $AF//BE$

Ⅲ　$CD=EF$



(1) Ⅰ　(2) Ⅱ　(3) Ⅲ　(4) Ⅰ 和 Ⅱ　(5) Ⅱ 和 Ⅲ

習題 4　設 a,b 為整數。求證 $ab(a+b)$ 必為偶數。

習題 5　在一輛火車上有三位結伴出遊的女乘客，她們在車上認識火車上工作的司機，

伙房及導遊等三位男工作人員。巧的是，三位小姐的姓氏與三位男工作人員的姓氏剛好相同。

下段文字是他們在車上對話的整理：

王小姐住台北，導遊住台中。陳小姐月收入有 4 萬元，

導遊的月收入剛好是離他家最近的小姐的三分之一。

導遊與住高雄的小姐同姓。李先生與伙房打過桌球。

問：司機，伙房及導遊貴姓。

【註：台北至台中與高雄至台中的距離當做一樣，月收入為整數元】

動手玩數學

設甲、乙、丙三人參加一項考試，其中是非題共有七題，每道題答對得 1 分，不答得 0 分，答錯倒扣 1 分。下表記錄著每個人的答題情形（空白代表此人該題未答），已知甲、乙、丙三人在是非題部分都得到兩分。而且標準答案中，×的題目比〇的題目還多。試由此推知各題的正確答案並加以說明。

題目\考生	甲	乙	丙
第一題	〇		×
第二題		×	〇
第三題	×	×	×
第四題	〇	×	〇
第五題	×	〇	〇
第六題	×	〇	
第七題	〇	〇	×
得分	2	2	2

挑戰題

探長的問題是這樣的：「我們有五位不太可信的證人，要指認十位販毒嫌犯。這五位證人要對每一位嫌犯各投一票，一一指認該嫌犯是否販毒。投票結果如下：

嫌犯 1	販毒 5 票
嫌犯 2	未販毒 5 票
嫌犯 3	販毒 2 票，未販毒 3 票
嫌犯 4	販毒 5 票
嫌犯 5	販毒 4 票，未販毒 1 票
嫌犯 6	未販毒 5 票
嫌犯 7	販毒 3 票，未販毒 2 票
嫌犯 8	販毒 5 票
嫌犯 9	未販毒 5 票
嫌犯 10	販毒 1 票，未販毒 4 票

我們只知道證人說謊的票數總共有九張；而大多數的謊票都是對「販毒」者投下「未販毒」的票，因為他們是一夥的。現在，你能告訴我們哪些嫌犯是真正的毒販嗎？」

羅素與邏輯學

羅素，英國邏輯學家、哲學家。十九歲進入劍橋大學三一學院攻讀數學與哲學，研究論文為《幾何學的基礎》。1901 年開始與懷海德合作，寫成三大卷的《數學原理》，聞名於世。羅素還是二十世紀最具影響力的哲學家，以著《萊布尼茲的哲學》一書奠立他在哲學界的地位。除數學與哲學外，羅氏也撰述通俗的評論性作品與短論集。羅素的文章融感性、理性、悟性於一爐，論見不俗，句句穿透人心。這麼精湛的寫作藝術使他成為 1950 年諾貝爾文學獎得主，他的得獎評語是「從他多采多姿、包羅萬象的重要著作裡，我們知道他始終是一位人道主義與自由思想的勇猛鬥士」。羅素本人在自傳裡則是這樣說的「愛的渴望、知識的追求及對人類苦難的極度同情，這簡單而又無比強烈的三種激情主宰了我的一生。」

數學詩篇的創造者……集合與邏輯的習題解答

習題 1

繪製下圖：

科目\老師	甲	乙	丙
數學	∨	4+5+1	3
物理		4	∨
化學		4+5+1	∨
生物	∨ (1+4)	4	
國文		∨	
歷史		∨	

由上表知道：打∨的記號（代表教授的科目）僅能打在所打的位置，所以甲教授數學、生物；乙教授國文、歷史；丙教授物理、化學。

習題 2

1. 由條件(a)知道第一週庚和辛不在同組,答案(4), (5)不可能。由條件(d)知道丙和戊皆在同組,答案(2), (3)不可能。所以答案(1)。
2. 由條件(d)知道丙和戊皆在同組,因此丙一定在溯溪組。所以答案(1), (3), (4), (5)不可能。故答案(2)。
3. 由條件(a)知道庚和辛在第一週不在同組，但己和庚也不同組，因此辛和己第一週應在同組。所以答案(5)。
4. 由條件(d)知道丙戊必在山路組。 從條件(c)知道：若假設甲在山路組則推論丁在山路組，在這種情形下山路組有四人甲丁丙戊，但由條件(a)知道第一週時庚辛不同組，可推論出山路組超過五人與題意不合，因此甲必不在山路組。所以甲必在溯溪組，故答案是 (1)。
5. 由條件(a), (b)知道：第一週結束後，庚辛中僅一人會改變組別，因此答案必需含有庚辛其中一人，但不可兩人同時改變組別，故答案(4)。

習題 3

答案是(4)(5)。

習題 4

如果 a 是偶數，那麼 $ab(a+b)$ 是偶數，同法可以得到：當 b 是偶數時，$ab(a+b)$ 也是偶數。如果 a,b 都是奇數，那麼 $a+b$ 是偶數，因此 $ab(a+b)$ 是偶數。

習題 5

將對話整理編號如下：

(1) 王小姐住台北；

(2) 導遊住台中，陳小姐月收入有 4 萬元，導遊的月收入剛好是離他家最近的小姐的三分之一；

(3) 導遊與住高雄的小姐同姓；

(4) 李先生與伙房打過桌球。

考慮下列表格，由(4)知道「伙房不姓李（所以對應於伙房與李的表格位置填(4)代表由此對話得到不對）」，由 $(1)+(3)$ 知道「導遊不姓王」，再由 $(2)+(3)$ 知道「因為 4 萬元沒辦法被 3 除盡，所以陳小姐的家不可能離導遊最近，而高雄與王小姐的台北家離台中導遊家一樣近，因此陳小姐住高雄，王小姐的家離導遊家最近（即導遊姓陳）」。綜合這些容易得到「司機姓李，伙房姓王」。

工作人員\姓氏	王	陳	李
司機			∨
伙房	∨		(4)
導遊	$(1)+(3)$	∨	$(2)+(3)$

動手玩數學參考解答

考慮下表所增列的最後一行（甲、乙、丙三人在該題的總得分）：

題目\考生	甲	乙	丙	◯ 或 ×
第一題	◯		×	0
第二題		×	◯	0
第三題	×	×	×	−3 或 +3
第四題	◯	×	◯	+1 或 −1
第五題	×	◯	◯	+1 或 −1
第六題	×	◯		0
第七題	◯	◯	×	+1 或 −1
得分	2	2	2	6

因為最後一行的各題總分之和為 6 分，所以

第三題是“×”，三人共得 3 分；

第四題是“◯”，三人共得 1 分；

第五題是“◯”，三人共得 1 分；

第七題是“◯”，三人共得 1 分。

現在考慮第一、二及六題。因為×的題目比◯的題目還多，所以第一、二及六題都是“×”。

挑戰題參考解答

製作如下的數學表格：

嫌犯代號	投票結果	說謊可能票數	記號
嫌犯 1	販毒 5 票	0 或 5 票	
嫌犯 2	未販毒 5 票	0 或 5 票	
嫌犯 3	販毒 2 票，未販毒 3 票	2 或 3 票	∨
嫌犯 4	販毒 5 票	0 或 5 票	
嫌犯 5	販毒 4 票，未販毒 1 票	1 或 4 票	∨
嫌犯 6	未販毒 5 票	0 或 5 票	
嫌犯 7	販毒 3 票，未販毒 2 票	2 或 3 票	∨
嫌犯 8	販毒 5 票	0 或 5 票	
嫌犯 9	未販毒 5 票	0 或 5 票	
嫌犯 10	販毒 1 票，未販毒 4 票	1 或 4 票	∨

因為打∨記號的四位嫌犯的最小說謊總數為 6 票，所以未打∨的六位嫌犯的說謊總數必需為 0 票（即指認某位嫌犯時所有人意見一致時，就表示沒有人對此嫌犯說謊）。因此 9

張謊票必須是由打∨記號的四位嫌犯所產生的。要剛好有 9 張謊票有兩種可能（括弧內的數字代表『販毒』者被投下『未販毒』的票數）：

(A) 嫌犯 3 未販毒，嫌犯 7 販毒（2），嫌犯 5 販毒（1），嫌犯 10 販毒（4）；

(B) 嫌犯 3 未販毒，嫌犯 7 販毒（2），嫌犯 5 未販毒，嫌犯 10 未販毒。

只有 (A) 才能產生：大多數的謊票都是對『販毒』者投下『未販毒』的票。所以 (A) 才是正確的情形。由於意見一致的組別表示所有人都誠實作證（嫌犯 1, 2, 4, 6, 8, 9），所以警方應該逮捕嫌犯 1, 4, 5, 7, 8 及嫌犯 10。