15 不用神仙真秘訣，直教枯木放花開

陰雨綿綿是老天賜給南港的厚禮，讓它比別的地方多一層灰濛濛的色彩。第一次與南港邂逅是大三的暑假，沒想到這是一段接下來十年斷斷續續與南港有約的開始，也是我人生一次重要的轉折。研究院路上的火車平交道，一個既複雜又古老的平交道，是我對南港的第一印象，也許也是提醒我中央研究院快到了的地標。

那個暑假，我考上了數學所的研習生，大概也是師大數學系的第一人吧！雖然高興，但是第一天卻是鬱悶的，記得回來的路上，跟一位讀台大的研習生坐在一塊，他說要跟我下象棋，我愣了一下，車上既沒棋盤，也無棋子，如何下起呢？他說下那種記憶棋！我靦靦的回答說「我記不起來整盤棋」。說實在的，我連記幾步都有問題，於是我懷疑著「這個研習生，我是不是僥倖考上的。」

不過也有愉快的事，數學所的圖書館堪稱亞洲數學藏書數一數二的地方，就連一百多年前的書或期刊都找得到。當研習生沒幾天，就發現圖書館裡有很多“數學謎題”之類的書籍。我對這類書籍很有興趣，這方面的知識，大概都是在那時候知曉的，直到今天，南部的書房裏，仍然珍藏著那時影印下來的各種數學謎題書籍，每逢過年，總會如數家珍般的翻閱一遍，順便回憶當時，一位像柯南一樣有著好奇心的大學生，窩在圖書館裡，享受著探索數學謎題書籍的樂趣。

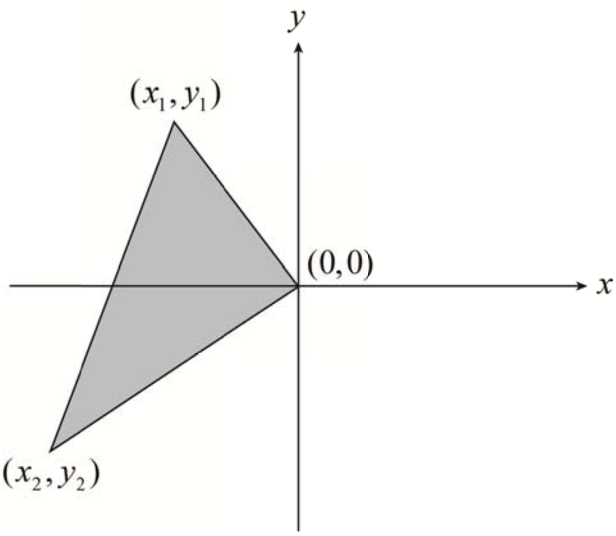
五、六年後，中央研究院數學所的討論室刻正上演著米勒的名著《代數 K 理論》，這本書就是在那時候讀完的。這本書給我的最大啟示就是“最有趣，也最困難的數學常常只是 $+1$ 或 -1 的判定而已”， 因為這本書有很大的部份就是在處理 $+1$ 與 -1 的問題。讀完這本書後，常想一個問題，小學的考試是先有是非題，中年級之後才考單選題與填充題，一直到高中才會有複選題。記得國三的時候，哥哥剛好參加大學聯考，那時的數學都是複選題，而且題題困難。我以為自己的數學不錯，就把當年的大學聯考數學試題拿來做。第一次做可以複選的選擇題真的很不適應，印象中好像沒有一題做對的。其實複選題麻煩的地方就是每個選項都是一道是非題，有四個選項就是四道是非題，五個選項就是五

道是非題。當出題者把選項弄成各自獨立時，那就很難了。其實複選題的本意並不是那樣，它應該只是測驗兩、三個觀念而已，也就是五個選項分成兩群或三群，這樣學生比較可以掌握，也不會像在做五道是非題一樣。說穿了，是非題就像±1的判斷一樣，很麻煩，所以我一直在想，小學是不是應該先從三選一的單選題考起，中年級之後再考是非題，這樣可能比較合理。

中學階段，碰到±1的數學判斷問題，都故意的避掉，例如：大家都知道下圖中的三角形面積為

$$\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|,$$

但究竟是$\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$，還是$-\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$，就不再深入討論了。



既然中研院數學所的讀書經驗告訴我「判斷+1或−1是有趣，重要且困難度極高的數學問題」，所以出個相關的問題考一下我國的數理資優生無妨。

我國的奧林匹雅數學選訓與訓練營有很長一段時間是在台灣師範大學數學系舉行，那時整個活動最困難的工作就是徵求可以篩選數理資優生的數學試題。當時主辦單位以每題兩千五百元的高薪向國內外中學老師及大學教授徵題，每次收到可用的題目都很少，不是太過簡單，就是超出高中課程範圍。底下這道與±1判斷有關的問題，就是改編自《代數K理論》那本書的一個定理，後來被徵選委員會錄取，當作考試試題：

題目： 設$\mathbb{Q}^{\times}$代表所有非 0 的有理數（分數）所構成的集合。若函數 $f:\mathbb{Q}^{\times}\times\mathbb{Q}^{\times}\to\mathbb{Q}^{\times}$滿足

(1) 對所有 $a,b,c\in\mathbb{Q}^{\times}$ 恆有

$$f(ab,c)=f(a,c)f(b,c).$$

(2) 對所有 $a,b,c\in\mathbb{Q}^{\times}$ 恆有

$$f(a,bc)=f(a,b)f(a,c).$$

(3) 對所有 $a\in\mathbb{Q}^{\times},a\neq 1$ 恆有

$$f(a,1-a)=1.$$

則稱 f 為斯坦伯格函數。

若 f 是一個斯坦伯格函數，則證明

(1) 對所有 $a\in\mathbb{Q}^{\times}$ 恆有

$$f(a,-a)=1.$$

(2) 對所有 $a,b\in\mathbb{Q}^{\times}$ 恆有

$$f(a,b)f(b,a)=1.$$

這是一道結合整數分解，符號運算及對稱使用的數學試題，基本上，必須用得巧且妙才能做出來。

$\boxed{\text{IMO 選訓營學生的妙解}}$

為方便起見，用符號$\{a,b\}$代表函數值 $f(a,b)$ 。

(1) 首先證明：對所有 $a\in\mathbb{Q}^{\times}$ 恆有

$$\{a,-a\}=1.$$

若 $a=1$ ，則由$\{1,-1\}=\{1\cdot 1,-1\}=\{1,-1\}\{1,-1\}$得到$\{1,-1\}=1$。若 $a\neq 1$ ，則由

$$\begin{aligned}1&=\{a^{-1},1-a^{-1}\}\\&=\{a,1-a^{-1}\}^{-1}\\&=\{a,(1-a)(-a)^{-1}\}^{-1}\\&=\{a,(1-a)\}^{-1}\{a,(-a)^{-1}\}^{-1}\\&=\{a,-a\}\end{aligned}$$

得證。

(2) 其次證明：對所有 $a,b\in\mathbb{Q}^{\times}$ 恆有

$$\{a,b\}\{b,a\}=1.$$

由

$$\begin{aligned}1&=\{ab,-ab\}\\&=\{a,-ab\}\{b,-ab\}\\&=\{a,(-a)b\}\{b,a(-b)\}\\&=\{a,-a\}\{a,b\}\{b,a\}\{b,-b\}\\&=1\cdot\{a,b\}\{b,a\}\cdot 1\\&=\{a,b\}\{b,a\}\end{aligned}$$

得證。