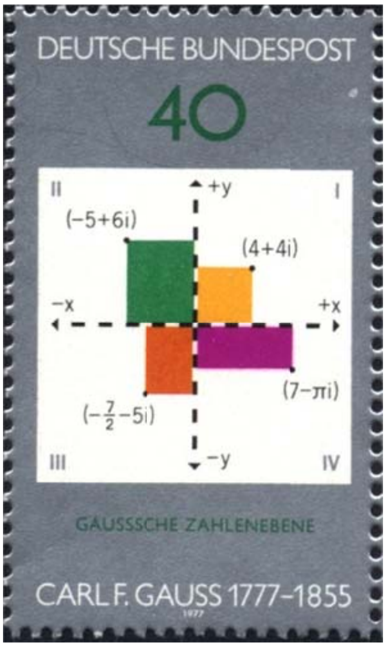
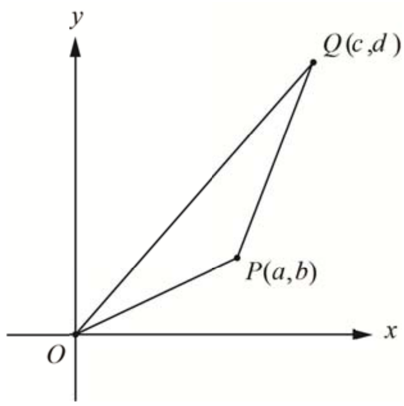
12 使用數學，不要被數學所使用



1831 年高斯認為複數不夠普及，在《哥庭根學報》上詳細說明坐標平面上的一個點(a,b)可以用複數$a+bi$來表示，並建立了複數的某些運算，使得複數的運算也像實數一樣地代數化。次年他發表了一篇備忘錄，第一次提出“複數”這個名詞，奠定複數在數學的地位。左圖是一張以複數平面為背景的郵票，這是為了紀念高斯大量的使用複數。對於一位創造數學概念，使用數學概念的人，發行郵票紀念他是應該的，總比紀念那些被數學所使用的人好。

我與“數學概念”這位奇人相遇的幾則小故事是在談論「中學學過的一些數學概念，如何在我解題過程中，扮演臨門一腳的角色，也讓我見識到“數學概念”這位巨人的魅力與威力。」幸虧有數學前輩們嘔心瀝血的提出這些“數學概念”，否則會走許多冤枉路。所以這裡的奇人就是“數學概念”，我只是安靜的觀察他們如何對問題下手的「觀察者」而已，或者說，我是“數學概念”的「粉絲」（fans）。



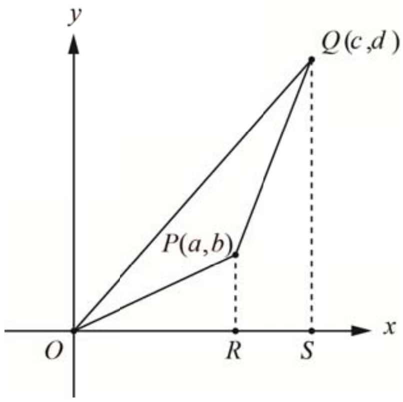
題目：(使用斜率)如右圖所示，設$P(a,b)$與$Q(c,d)$是坐標平面第一象限上的兩個點。試判斷

$$ad-bc$$

的正、負情形。

單從圖形來看，似乎可知$a<c$與$b<d$，但這樣的不等式只能推得$ab<cd$，無法判斷ad與bc的大小。接下來，我們想透過與引進各種不同的“數學概念”來轉化與解決這個問題：

① （與面積相遇）考慮三角形PQO，透過“面積”的概念來判斷$ad-bc$的正負：為了求PQO的面積，作P與Q在x軸的垂足為R與S：



計算

$$\begin{aligned}\Delta PQO &= \Delta QOS-\Delta POR-\text{梯形 } PRSQ\\ &= \frac{c\cdot d}{2}-\frac{a\cdot b}{2}-\frac{(b+d)\cdot(c-a)}{2} \quad ,\\ &= \frac{ad-bc}{2},\end{aligned}$$

得兩倍三角形PQO的面積為$ad-bc$，即

$$ad-bc>0.$$

② （與斜率相遇）將P與Q分別與原點作連線，得直線PO與QO，考慮這兩條直線的斜率，得OP的斜率$\frac{b-0}{a-0}=\frac{b}{a}$與$OQ$的斜率$\frac{d-0}{c-0}=\frac{d}{c}$。現在比較斜率大小，因為直線$OP$比直線$OQ$不傾斜，所以得

$$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{ad-bc}{ac}>0.$$

又a,c都是正數，所以

$$ad-bc>0$$

恆成立。

③ （與複數相遇）將點$P(a,b)$與$Q(c,d)$想成高斯平面上所對應的複數$a+bi$與$c+di$。這就是透過“複數”的概念，將點轉化成可以運算的複數。

由複數的定義及根據棣美佛定理，得

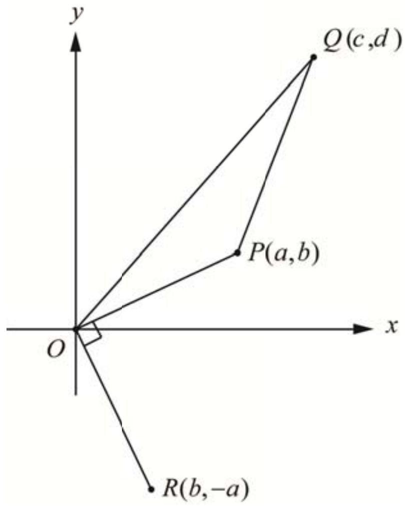
$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{OQ(\cos\angle QOR+i\sin\angle QOR)}{OP(\cos\angle POR+i\sin\angle POR)}$$
$$=\frac{OQ}{OP}\left(\cos(\angle QOR-\angle POR)+i\sin(\angle QOR-\angle POR)\right)$$
$$=\frac{OQ}{OP}\left(\cos\angle QOP+i\sin\angle QOP\right),$$

又$0^\circ<\angle QOP<90^\circ$，所以$\sin\angle QOP>0$，即複數$\dfrac{c+di}{a+bi}$的虛部是正實數。由

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

得$ad-bc>0$。

④ （與向量相遇）如下圖所示，令R點坐標為$(b,-a)$。



這裡產生三個平面向量$\overrightarrow{OP}=(a,b),\overrightarrow{OR}=(b,-a)$與$\overrightarrow{OQ}=(c,d)$。由

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=ab+b(-a)=0,$$

得$\angle POR=90^\circ$，即$90^\circ<\angle QOR<180^\circ$。利用向量內積公式

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=\overline{OQ}\cdot\overline{OR}\cos\angle QOR<0,$$

得

$$cb+d(-a)<0,$$

即$ad-bc>0$。

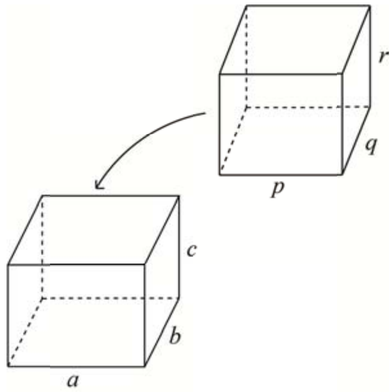
坐標平面上的三角形、直線與點原本是幾何的東西，但是透過「面積」、「斜率」、「複數」與「向量」，將幾何的層面導引到可以運算的代數層次，而且這些概念都是中學就學會的基本工具。

你利用 7-11 的「黑貓宅急便」寄過東西嗎？如果寄過，就會知道它的費率是根據箱子長、寬、高這三個長度的“和”（俗稱「包裏尺寸」）來計算。下表是統一宅急便運費表（同一縣市）：

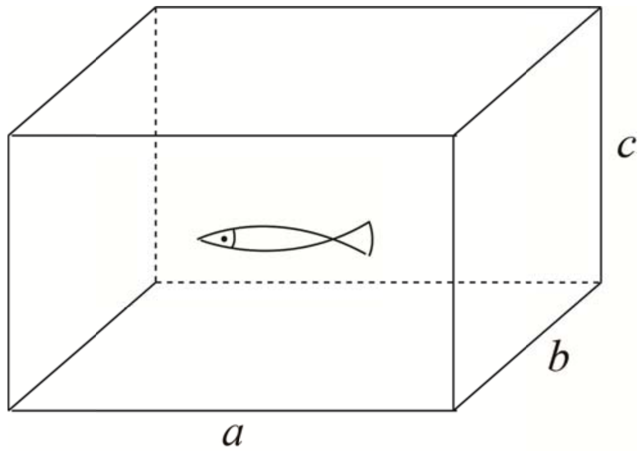
包裹尺寸	60 cm	61~90 cm	91~120 cm	121~150 cm
宅急便	110 元	150 元	190 元	230 元

讓我們研究一下長方體的長、寬、高所隱藏的奧秘！

題目：(使用拋物線的開口) 如右圖所示，長、寬、高為 p,q,r 的箱子可以以適當傾斜的角度或特殊擺放方式，整個放入另一個長、寬、高為 a,b,c 的箱子裡。試問 $a+b+c$ 是否一定比 $p+q+r$ 來得大呢？



想要使用好的“數學概念”解題，必須帶點想像力才行，讓我們把長方體想成透明玻璃製成的水族箱，裡頭養著一條觀賞魚。這條觀賞魚的視力有限，只能看見距離眼睛 x 以內的空間，所以當觀賞魚貼近水族箱邊緣時，除非將你的手放置在離水族箱邊緣 x 的範圍內，否則你對牠的招手是無效的。當觀賞魚在水族箱內到處游動時，牠所能看見的空間體積有多大呢？（這跟把一頭牛綁在一根木樁上，求牛所能吃到的草皮面積很像吧！）讓我們來計算一下吧！



在計算觀賞魚所能看見的空間體積時，你可以把自己想成那條觀賞魚，所在的房間視為魚缸。首先，魚缸內部是觀賞魚可游到，看到的空間，其體積為abc；前後左右上下延伸x的六塊長方體也是觀賞魚可向外看見的空間，其體積為$2(ab+bc+ca)x$；十二條棱線中，每條棱線向外畫出一個半徑x的四分之一圓柱，也是觀賞魚可向外看見的空間，其體積為$(a+b+c)\pi x^2$；最後八個頂點向外各畫出半徑x的八分之一球，也是觀賞魚可向外看見的空間，合起來剛好一個球，其體積為$\frac{4}{3}\pi x^3$。這些體積總和為

$$\frac{4}{3}\pi x^3+(a+b+c)\pi x^2+2(ab+bc+ca)x+abc,$$

是觀賞魚可看到空間的體積。同法可得，在長、寬、高為p,q,r的魚缸裡的觀賞魚，可看到空間的體積為

$$\frac{4}{3}\pi x^3+(p+q+r)\pi x^2+2(pq+qr+rp)x+pqr.$$

因為長、寬、高為p,q,r的箱子可以以適當的角度或方式整個放入長、寬、高為a,b,c的箱子裡，也就是說，長、寬、高為a,b,c的觀賞魚所能看見的空間涵蓋長、寬、高為p,q,r的觀賞魚所能看見的空間，即$f(x)=(\frac{4}{3}\pi x^3+(a+b+c)\pi x^2+2(ab+bc+ca)x+abc)-(\frac{4}{3}\pi x^3+(p+q+r)\pi x^2+2(pq+qr+rp)x+pqr)\geq 0$，整理得到$f(x)=(a+b+c-p-q-r)\pi x^2+2(ab+bc+ca-pq-qr-rp)x+(abc-pqr)\geq 0$。因為不等式是對所有的正實數$x$都成立（想成換視力不一樣的觀賞魚），又$y=f(x)$是拋物線或直線（此種情況$a+b+c-p-q-r=0$），所以拋物線的開口必須向上，即

$$a+b+c-p-q-r>0 \text{ 或 } a+b+c-p-q-r=0,$$

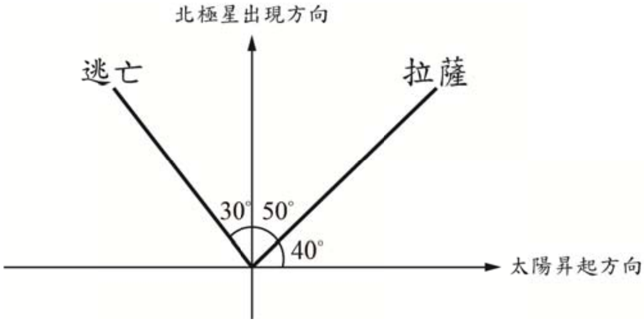
得到

$$a+b+c \geq p+q+r.$$

笛卡爾創立直角坐標系，可以將許多平面幾何問題代數化處理，但是，那些應該定坐標系解決，那些不需要，是最難拿捏的地方。讓我們欣賞一道同時使用“直角坐標”與“有向角”這兩個數學概念的題目：

題目：(使用坐標與有向角) 印度間諜南星在前往拉薩的途中遇到搶匪，南星落荒而逃，轉往一條小路。翌日發現太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向昇起。南星回想被搶當晚，北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方位上。
問南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路夾角是幾度？（太陽昇起的方向算為正東，北極星出現的方向算為正北）

將直角坐標定調為 x 軸正向是「太陽昇起的方向」；y 軸正向是「北極星出現的方向」。有了這樣的定位之後，由「北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方位上」知「前往拉薩之路與正東夾 40°」；由「太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向昇起」知「逃亡小路與正北夾 30°」。畫圖如下：

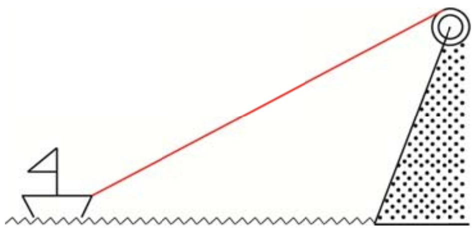


所以南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路之夾角是

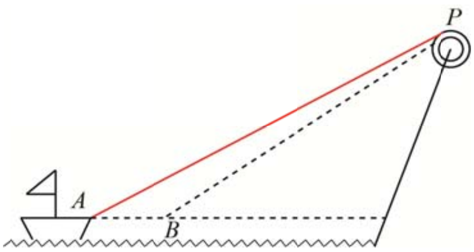
$$30^\circ+50^\circ=80^\circ.$$

「兩邊之和大於第三邊」是大家在日常生活中與數學課程裡非常熟悉的三角不等式。這個概念的使用有時候很容易，很明顯，但有時卻不容易發覺。底下就是一個例子

題目：(使用三角不等式)如右圖所示，滑輪拖著輪船，讓船靠近岸邊。問：滑輪捲動的繩子長度與輪船前進的距離何者較大？請證明之。



如下圖所示



滑輪捲動的繩子長度為

$$|PA-PB|;$$

而輪船前進的距離為

$$AB.$$

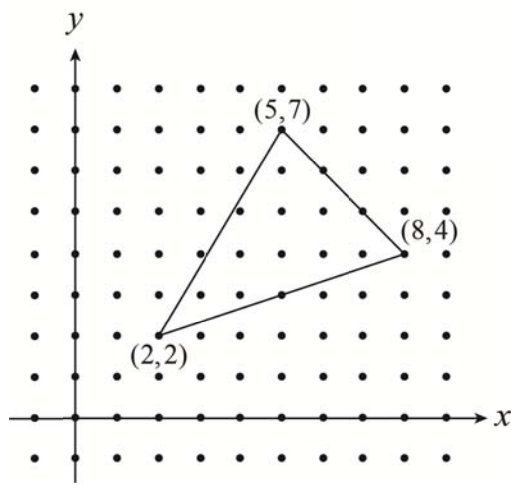
由三角形PAB的三角形不等式知道

$$|PA-PB|< AB,$$

即滑輪捲動的繩子長度＜ 輪船前進的距離。

在房子裡，想估算一間面積大小，最簡單的方式莫過於憑直覺。如果不靠直觀，另一個方便又準確的方法是「數鋪在地上的磁磚個數」。因為磁磚方方正正，每個大小相同，可以反應房間的大小。那麼，在直角坐標平面上，那個東西可以拿來當磁磚，反應面積呢？皮克就用排列僅然有序的「格子點」來表示面積。讓我們來欣賞這一概念：

題目：(使用格子點的個數) 格子點是直角坐標平面上 x 與 y 坐標都是整數的點，如右圖所示，三角形內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。

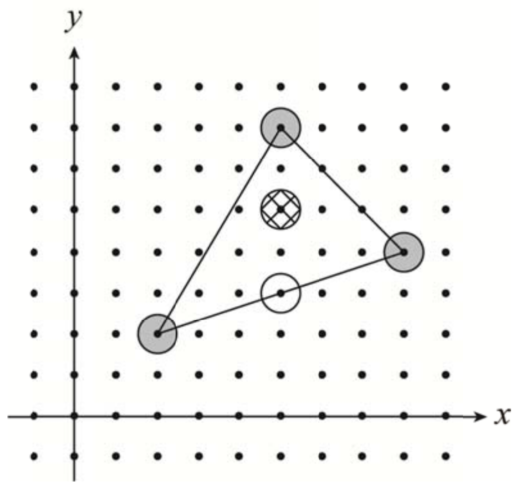


皮克發現：內部有 I 個格子點，邊上有 S 個格子點的三角形面積為

$$\frac{S}{2}+I-1.$$

你有比較好的方法解釋這公式的合理性嗎？

這個公式常稱為「皮克公式」。將以每一個格子點為圓心，畫直徑為 1 的圓，如下圖所示：



一種富有創意的思維與計算面積方式：

① 當格子點在三角形內部時（如畫有井字圓圈所示）：

因為附近區域的面積都在三角形內部，所以每個格子點當成 1 單位的面積計算，此部分得到 I 單位面積；

② 當格子點落在三角形的邊上，而非頂點時（如空白圓圈所示）：

因為一半的區域在三角形內部，另一半在外部，所以每個格子點只能以 $\frac{1}{2}$ 單位的面積計算，此部分得到 $\frac{S-3}{2}$ 單位面積；

③ 當格子點是三角形的三個頂點時（如灰色圓圈所示）：

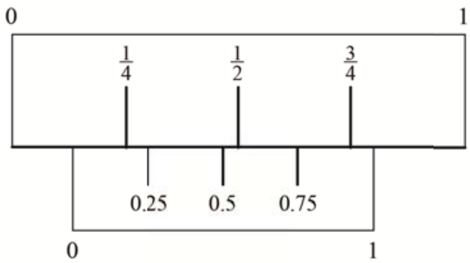
因為三內角和為180°，所以三頂點附近的區域只能拼出半個圓，也就是$\frac{1}{2}$單位面積。綜合得到三角形面積為

$$I+\frac{S-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

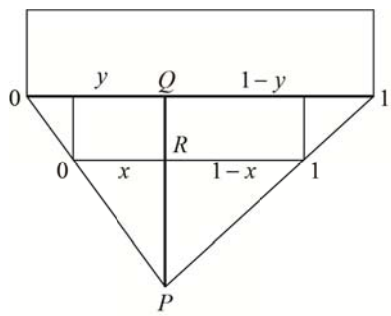
每人心中各有一把尺，但你的尺跟我的尺有共同的交點嗎？讓“幾何相似”這概念來說明吧！

題目：(使用幾何相似) 右圖是兩把大小不一樣，但是刻度都是介於 0 與 1 之間的尺，將其刻度的邊任意的對在一起。

證明大小兩把尺必有一相同的刻度對在一起。



考慮下圖，設小尺上R點的刻度為x；大尺上Q點的刻度為y。



利用三角形的相似性值，得

$$\frac{x}{y}=\frac{PR}{PQ}=\frac{1-x}{1-y}\Rightarrow x(1-y)=y(1-x),$$

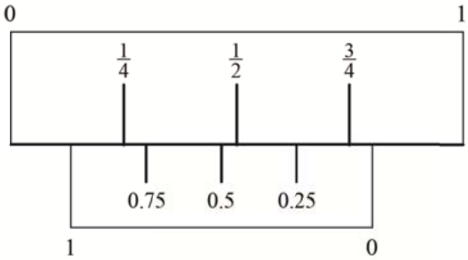
將兩邊乘開相消，得

$$x=y.$$

因此，Q點所對應的大、小尺的刻度都一樣。

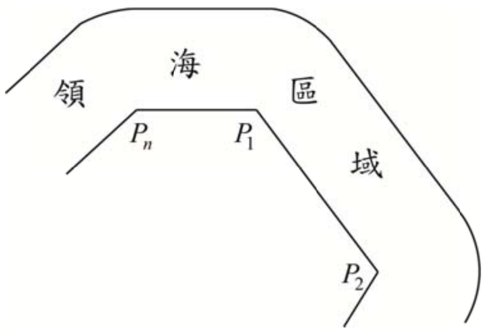
在日常生活中，碰到過兩種大小不一的刻度並排或並列嗎？溫度計就是一個例子，它有攝氏及華氏兩種刻度。將上面作法使用在溫度計時，你將發現-40℃與-40℉的刻度是在同一高度上。

練習 1　如下圖所示，將小尺調個頭與大尺接觸，是否他們仍會有相同的刻度對在一起。

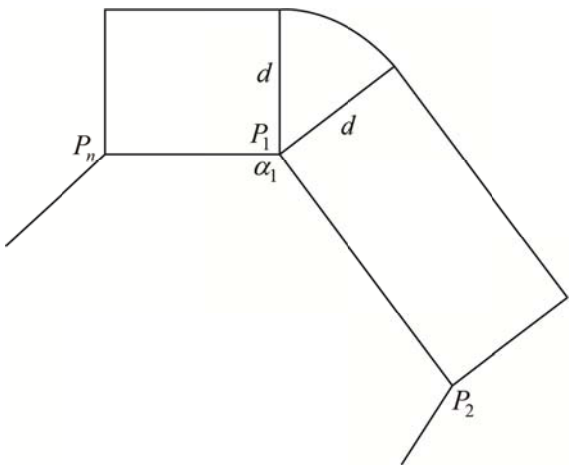


題目：(使用多邊形內角和) 考慮平面上一個凸多邊形區域$P_1P_2P_3\cdots P_n(n\ge 3)$。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長$p$就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離$d$的範圍之內都是她的領海。試證明：她的領海面積是

$$(p+\pi d)d.$$



如下圖所示，令凸多邊形區域$P_1P_2P_3\cdots P_n$的P_i所對應的內角為α_i。



領海是由$P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_nP_1$為邊向外作寬為$d$的$n$個矩形及頂點$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$所在外角所

圍成半徑 d 的扇形面積總和。

$P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形面積和為

$$(P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_nP_1)d = pd.$$

頂點 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積和為

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i)\frac{\pi d^2}{2\pi} &= \left(n\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\right)\frac{\pi d^2}{2\pi} \\ &= \left(n\pi - (n-2)\pi\right)\frac{\pi d^2}{2\pi} \\ &= \pi d^2.\end{aligned}$$

故領海面積為

$$pd + \pi d^2 = (p + \pi d)d.$$

練習 2　如果這是個周長為 p 的圓形國家，那麼其領海面積是多少？

“蝴蝶效應”相傳是洛倫茲在一次計算中首次偶然發現的。1961 年洛倫茲在進行長期天氣預報的計算，當時在計算中使用了一台現在看來速度太慢的電腦，有一次他在計算中斷後重新開始計算時，把上一次計算的中間資料作為這次計算的初始值輸入電腦，指望在重複給出上次的計算結果後電腦再繼續運行下去。然而出人意料的是計算結果只在開始的一小段與原來結果偏差很小，之後偏差越來越大以致得到完全相反的結果。洛倫茲意識到問題出在他輸入資料的精度上。因為電腦能以六位元小數運行，這次存儲下的是：0.606127，而印表機僅列印了前三位元數位：0.606。這次他是以這個三位小數作為重新計算的初始值，忽略掉了尾數 0.000127。洛倫茲認為造成重大偏差的原因就是忽略掉了這點尾數，由此他認定這個方程對初始值具有高度的敏感性。洛倫茲將這一現象比喻為“蝴蝶效應”，意思是說一隻蝴蝶扇動翅膀所引起的氣流擾動會發展成一場“巨大風暴”。

“蝴蝶效應”是“混沌數學”可以解釋的一種現象。什麼是“混沌數學”呢？它是由多項式、三角函數等這些基本函數迭代而成的複雜數學，現在就讓我們來計算一道拋物線所產生的“混沌數學”：

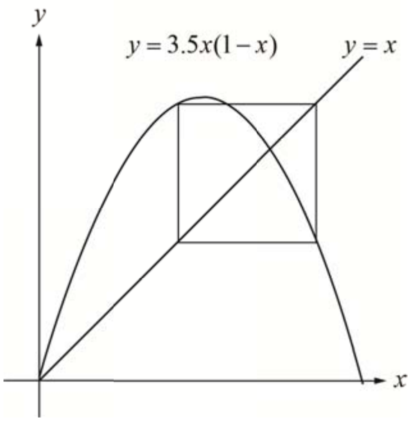
題目：(使用一次因式檢驗法) 如右圖所示：拋物線

$$y = 3.5x(1-x)$$

與直線

$$y = x$$

上各取兩個相異點，使它們成為正方形。求拋物線上取的點坐標為何？



如果令正方形右下角的坐標為(x, y)，那麼正方形左上角的坐標應為(y, x)。又這兩個點$(x, y), (y, x)$都在拋物線上，所以x, y滿足多項式方程組

$$\begin{cases} y = \dfrac{7}{2}x(1-x); \\ x = \dfrac{7}{2}y(1-y). \end{cases}$$

將$y = \dfrac{7}{2}x(1-x)$代入$x = \dfrac{7}{2}y(1-y)$，得

$$x = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}x(1-x)\left(1-\frac{7}{2}x(1-x)\right).$$

因為$x > 0$，所以兩邊消去x，整理得

$$7^3x^3 - 2\cdot 7^3x^2 + 3^2\cdot 7^2x - 2\cdot 3^2\cdot 5 = 0.$$

由一次因式檢驗法，得$px - q$為其因式的條件為

$$p \mid 7^3,\ q \mid 2\cdot 3^2\cdot 5.$$

利用綜合除法驗算，得$7x-3, 7x-5, 7x-6$為它的所有一次因式，即$x = \dfrac{3}{7}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{6}{7}$。代入原方程組解得

$$(x,y)=\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right),\left(\frac{5}{7},\frac{5}{7}\right),\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right).$$

由假設知$x>y$，因此$(x,y)=\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right)$。故拋物線上取的點坐標為

$$\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right) \text{ 與 } \left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right).$$

〔另解〕將

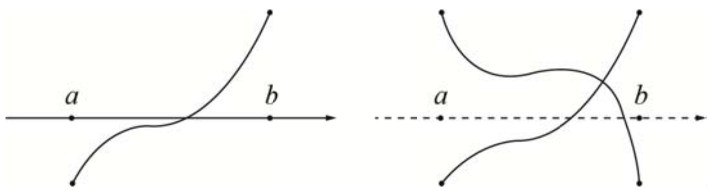
$$\begin{cases} y=\frac{7}{2}x(1-x); \\ x=\frac{7}{2}y(1-y). \end{cases}$$

兩式相減，得

$$(x-y)=\frac{7}{2}\left(y-y^2-x+x^2\right)=\frac{7}{2}(x-y)(x+y-1)\Rightarrow x+y=\frac{9}{7}.$$

將$x+y=\frac{9}{7}$代入原式，得到解答。

「勘根定理」是說「當$f(a)f(b)<0$時，$f(x)=0$有一介於a與b之間的實數根。」其實比較好的講法是「從$x=a$畫到$x=b$的兩條曲線，如果在$x=a$時，第一條在第二條的上方，而在$x=b$時，第二條在第一條的上方，那麼這兩條曲線必定在中途相遇過。」

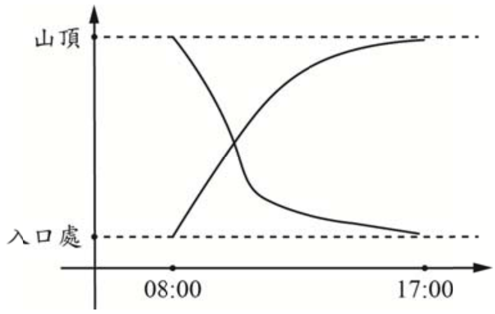


在「勘根定理」中使用的兩條曲線就是$y=f(x)$與x軸。

題目：(使用勘根定理的概念) 和尚每逢週末都有兩天的朝聖之旅。週六的早上八點，準時從山腳下的入口處山發，傍晚五點準時到達山頂的寺廟；週日則是早上八點，準時從寺廟出發，走昨天經過的路，並準時於傍晚五點返回山腳的入口處。

在這兩天的朝聖行程裡，會有某個時刻，他們剛好在同一個地點。

使用勘根定理來解，將 x 軸當時間，y 軸當登山路徑的對應距離。將週六、日的速度圖畫出，會得到像下圖的兩條曲線：



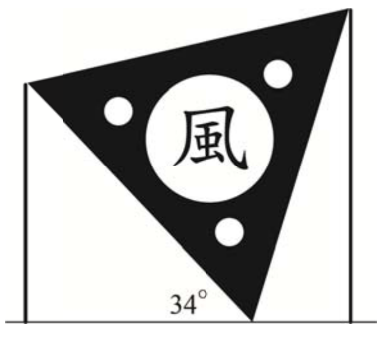
因為下山的路徑與上山的路徑在早上八點與下午五點各有高低，所以由勘根定理知，兩條路徑會相交於一點，此點就是所求的點，它所對應的時間就是相遇的時刻。

利用幻象解法，將兩天的登山疊在一起，也就是早上八點，有人從入山口登山（週六），也同時有人從山頂下山（週日），他們都是在下午五點到達目的地，顯然他們一定在某個時刻會相遇。相遇的點與時間就是所求的。

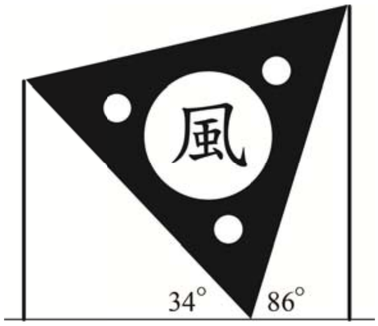
日常生活中，“勘根定理”這個概念經常被使用，只是你沒有發覺而已，例如早上你搭客運從台北到高雄,而同時你的友人從高雄也搭客運來台北。雖然兩人不可能聚在一起，但是某個時刻，你們在路上肯定是相遇過的。又如颱風有颱風眼，微笑會有酒窩，頭髮會有旋轉中心，這些都是球面上“勘根定理”的例子。

三角學裡的和差化積與積化和差是學生學習困難的數學內容，除了許多恆等式要記憶外，大部分的題目都很冰冷，艱深。現在就讓我們來欣賞一道饒富趣味的和差化積問題：

題目：(使用和差化積) 某校為了舉辦科展，將一長竹子鋸成兩段，分別豎立在會場門口，且在兩段竹子頂端與地上一點，架設一個邊長為 10 公尺的正三角形看板，如右圖所示。已知 $\cos 26^{\circ} = 0.9$ ，求原竹子長。



因為看板為正三角形，所以右邊竹竿的仰角為$180^\circ-(34^\circ+60^\circ)=86^\circ$。因此，完整的角度如下圖所示：



因為長竹竿的長度是兩截短竹竿的和，所以長竹竿的長度為

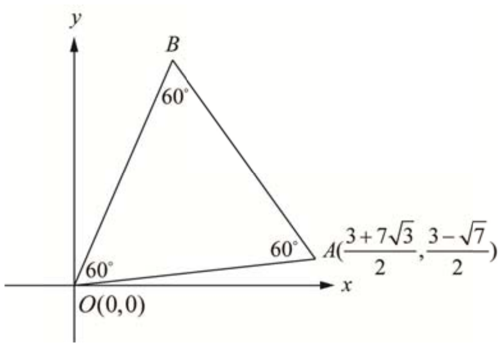
$$
\begin{aligned}
10\sin 34^\circ+10\sin 86^\circ &= 10(\sin 34^\circ+\sin 86^\circ)\\
&= 10\cdot 2\sin\frac{34^\circ+86^\circ}{2}\cos\frac{34^\circ-86^\circ}{2}\\
&= 10\cdot 2\sin 60^\circ\cos 26^\circ\\
&= 10\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.9\\
&= 9\sqrt{3}(\text{公尺})
\end{aligned}
$$

棣美弗定理也是不容易瞭解的一個定理，特別是處理旋轉方面的問題，最有名的例子莫過於求正多邊形的坐標：

題目：(使用棣美弗定理)在右圖中，三角形OAB是坐標平面上的正三角形，且$O=(0,0)$，

$$A=\left(\frac{3+7\sqrt{3}}{2},\frac{7-3\sqrt{3}}{2}\right).$$

試求B點的坐標。



將座標平面換成複數平面，A點的複數座標為

$$\frac{3+7\sqrt{3}}{2}+\frac{7-3\sqrt{3}}{2}i$$

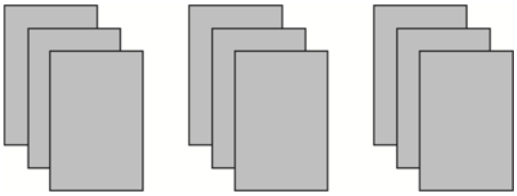
設 B 點的複數座標為 $x+yi$。因為 $\angle BOA=60^\circ, BO=AO$，所以

$$\begin{aligned}
&\frac{B\text{點的複數座標}}{A\text{點的複數座標}}=(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\\
&\Rightarrow \frac{x+yi}{\frac{3+7\sqrt{3}}{2}+\frac{7-3\sqrt{3}}{2}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\
&\Rightarrow x+yi=\left(\frac{3+7\sqrt{3}}{2}+\frac{7-3\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=3+7i.
\end{aligned}$$

因此 B 點的座標為 $(3,7)$。

適當的使用未知數，也可以對問題有很大的幫助：

題目：(使用未知數) 老師背對著學生，讓學生按下列四個步驟操作：



① 分發左、中、右三堆牌，每堆牌不少於兩張，且各堆牌現有的張數一樣；

② 從左邊一堆拿出兩張，放入中間一堆；

③ 從右邊一堆拿出一張，放入中間一堆；

④ 左邊一堆有幾張牌，就從中間一堆拿幾張牌放入左邊一堆。

這時老師準確說出了中間一堆牌現有的張數，你認為奧妙在哪呢？

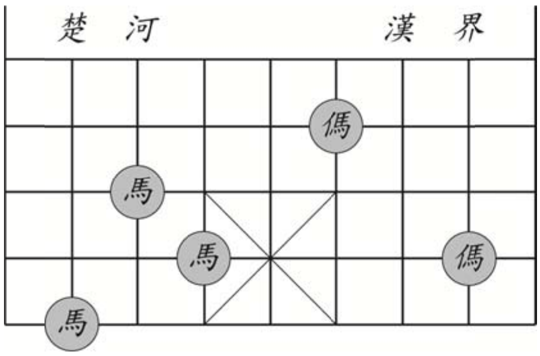
假設第①步時，(左、中、右) 的牌數為 (x,x,x)，在第②步時，變成 $(x-2,x+2,x)$，又第③步時，變成 $(x-2,x+3,x-1)$，最後第④步時，變成

$$(2(x-2),(x+3)-(x-2),x-1)=(2x-4,5,x-1).$$

所以中間那堆牌最後的張數都是 5 張。

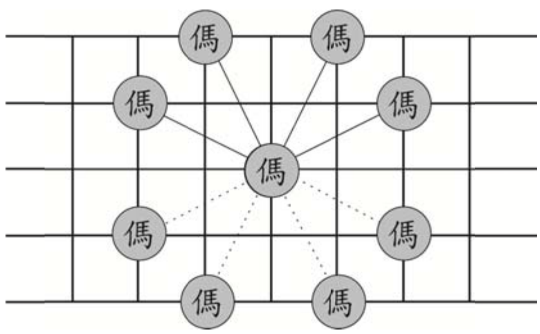
象棋是中國的國粹，「馬後炮」、「兵貴神速」、「世事如棋局，不著的才是高手，人生似瓦罐，打破了方見真空」是象棋裡的術語，把象棋當成遊戲，趣味性很高；視為體育競賽，娛樂性很強；把它看成人生縮影，世事人生一局棋，這就是象棋的三重境界。

題目：(使用向量的概念) 中國象棋棋盤中蘊含著直角坐標系，如右圖所示是棋盤的半邊江山，棋子「*馬*」與「*傌*」走的規則是沿「*日*」形的對角線走，例如圖中馬的位置可以沿虛線走到另兩個馬的位置。



請按「馬」與「傌」走的規則，將圖中的「傌」移動至另一個「傌」的位置。

如果把最上方「傌」的位置視為原點$(0, 0)$，那麼下方「傌」的位置坐標就是$(2,-2)$。因為「傌」的下一步有八個方位可移動（如下圖所示）



所以可以將它們用向量描述為

$$(1,2),(2,1),(-1,2),(-2,1),(-1,-2),(-2,-1),(1,-2),(2,-1)$$

這八個向量的移動。又向量$(-1,-2)=-(1,2)$，$(-2,-1)=-(2,1)$，$(1,-2)=-(-1,2)$，

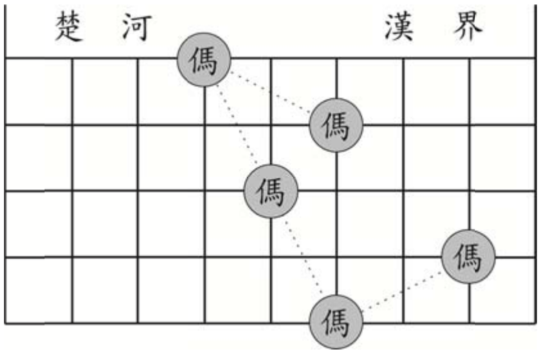
$(2,-1)=-(-2,1)$，所以「傌」的下一步可以用 $(1,2),(2,1),(-1,2),(-2,1)$ 這四個方向及其反方向來表示。現在解

$$(2,-2)=a(1,2)+b(2,1)+c(-1,2)+d(-2,1)$$

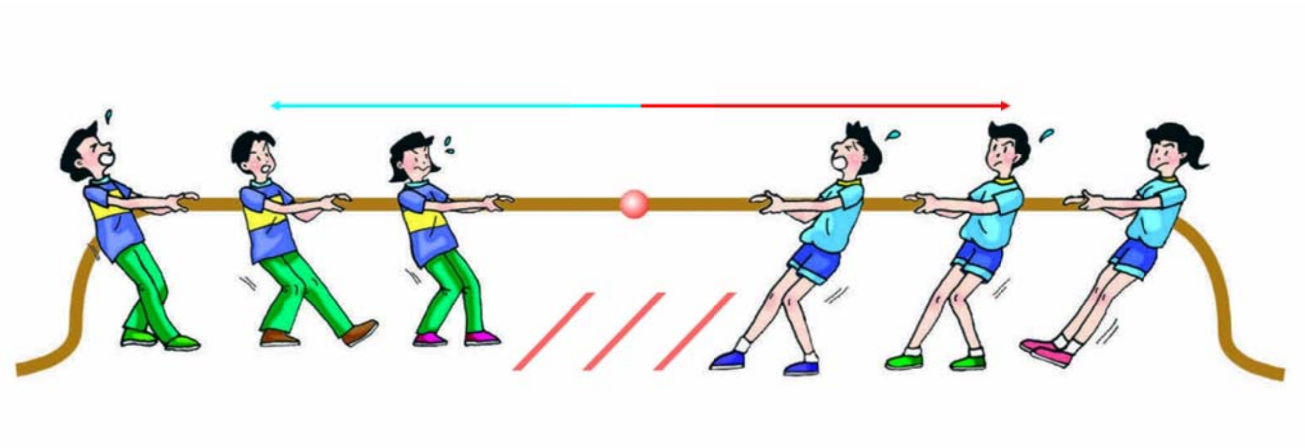
的整數解 a,b,c,d 。顯然可以看出很多解，例如

$$(a,b,c,d)=(0,1,-2,1),(1,-1,-1,-1),(0,1,-2,1)$$

是三個解，其中第一個解 $(0,1,-2,1)$ 所代表的走法就是「走 $(-2,1)$ 之後，連走兩步 $(1,-2)$ ，再走一步 $(2,1)$ 」，在棋盤上的對應走法為

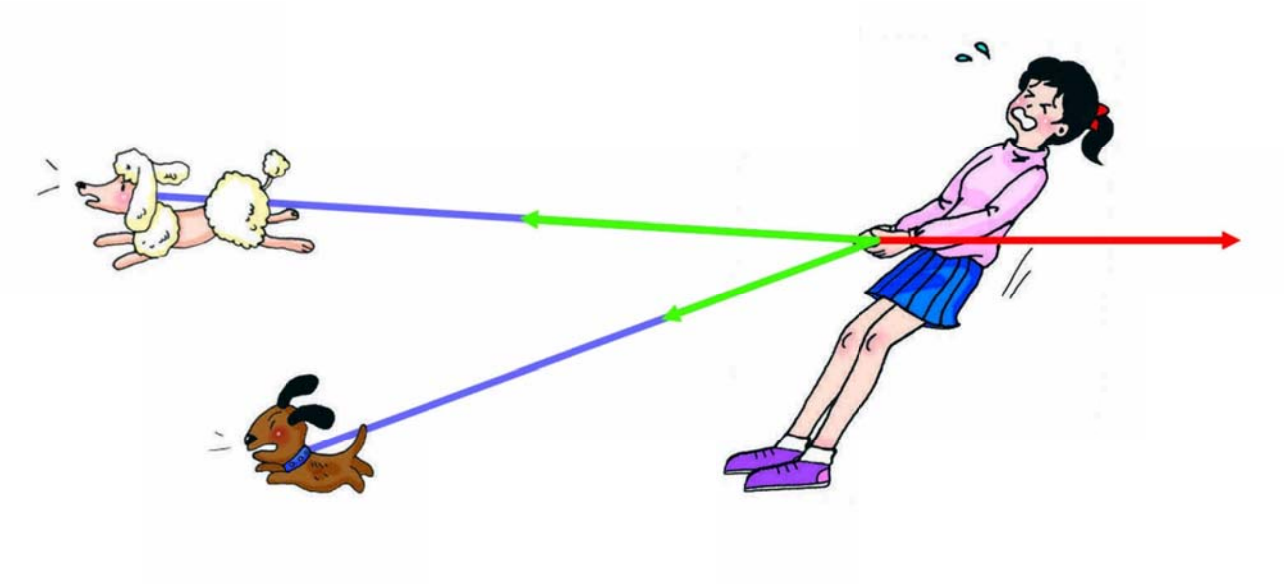


在物理學上，因為力不但有大小而且有方向，所以力是向量。力可用有向線段表示，有向線段的長度代表力的大小；有向線段的方向為力的方向。例如圖中，左、右兩隊正進行拔河比賽，我們用向量 $\vec{a}$ 代表左隊的力，向量 $\vec{b}$ 代表右隊的力。如果兩隊旗鼓相當，保持平衡不動，那麼這時向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的和必為 $\vec{0}$ ，即 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ 。換句話說，向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的大小相等、方向相反，即 $\vec{b}=-\vec{a}$ 。



讓我們來欣賞一道較複雜的向量概念應用：

題目：(使用向量的概念) 小英溜狗時，不知何故兩隻狗突然向前衝，如下圖所示：



如果大狗的拉力為 5 公斤重，小狗的拉力為 3 公斤重，兩隻狗向前衝的夾角為60°，那麼小英至少要施多少力才能剛好拉住牠們？

設大狗拉力向量為$\vec{a}$，小狗拉力向量為$\vec{b}$。欲保持平衡，小英施力向量為$\vec{c}$。因為

$|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=3, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為$60^\circ$，所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=5\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$$

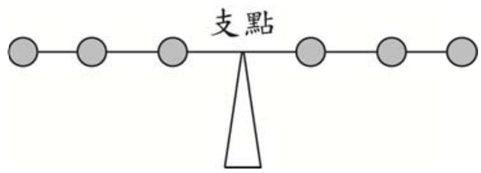
及

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2&=|-(\vec{a}+\vec{b})|^2\\&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=5^2+2\cdot\frac{15}{2}+3^2\\&=49.\end{aligned}$$

故小英至少要施$|\vec{c}|=\sqrt{49}=7$公斤的力才能剛好拉住牠們。

小時候大家一定玩過蹺蹺板，蹺蹺板的技巧幾乎每個人都瞭解，讓越重的人坐離支點越

遠的地方越好，因為這樣產生的力距最大。至於什麼是力距呢？當然是重量乘以離支點的距離了。可是你曾想過嗎？簡單、容易瞭解的蹺蹺板原理會與複雜、抽象的向量內積相關。



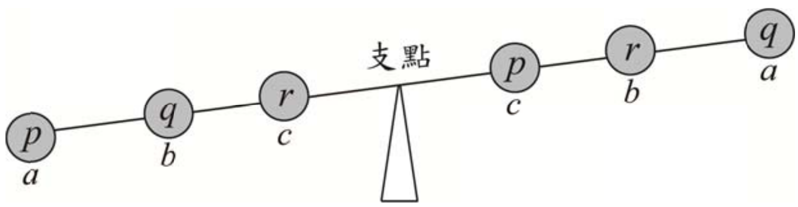
題目：(使用蹺蹺板的概念) 設實數$a,b,c;p,q,r$的大小為

$$a \geq b \geq c \geq 0, p \geq q \geq r \geq 0.$$

試比較

$ap+bq+cr, aq+br+cp, ar+bq+cp$ 的大小關係。

因為$a \geq b \geq c \geq 0$，所以將蹺蹺板左、右兩邊離支點c,b,a的位置放上圓形座位。現在想像體重p,q,r的大胖、中胖與小胖三人坐在那三個圓形位座位。如下圖所示



蹺蹺板左邊讓最重的大胖p坐離支點最遠的a位置，中胖q坐離支點次遠的b位置，最輕的小胖r坐離支點最近的c位置；而蹺蹺板右邊讓中胖q坐離支點最遠的a位置，最輕的小胖r坐離支點次遠的b位置，最重的大胖p坐離支點最近的c位置。根據蹺蹺板原理，蹺蹺板左邊產生的力距

$$ap+bq+cr$$

超過蹺蹺板右邊產生的力距

$$aq+br+cp,$$

也就是蹺蹺板會向左傾，即

$$ap+bq+cr \geq aq+br+cp.$$

同樣的使用蹺蹺板的概念，得

$$aq+br+cp \geq ar+bq+cp.$$

故大小次序為

$$ap+bq+cr \ge aq+br+cp \ge ar+bq+cp.$$

如果仔細觀察，不難發現$ap+bq+cr, aq+br+cp$與$ar+bq+cp$這三個量可以表成空間向量的內積如下：

$$\begin{aligned} ap+bq+cr &= (a,b,c)\cdot(p,q,r); \\ aq+br+cp &= (a,b,c)\cdot(q,r,p); \\ ar+bq+cp &= (a,b,c)\cdot(r,q,p). \end{aligned}$$

由內積公式

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\text{向量 }\vec{a}\text{ 與向量 }\vec{b}\text{ 的夾角})$$

與不等式$ap+bq+cr \ge aq+br+cp \ge ar+bq+cp$可以知道，向量$(a,b,c)$與向量$(p,q,r),(q,r,p),(r,q,p)$之間的夾角關係。

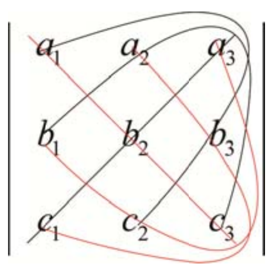
練習 3　設向量(a,b,c)與向量$(p,q,r),(q,r,p),(r,q,p)$之間的夾角分別為α,β,γ。寫下α,β,γ的大小關係。

事實上，利用蹺蹺板的概念，可以得到一般的不等式

$$ap+bq+cr \ge \left\{ \begin{array}{l} aq+br+cp \\ ap+br+cq \\ ar+bp+cq \\ aq+bp+cr \end{array} \right. \text{四數中的任一數} \ge ar+bq+cp.$$

題目：(使用行列式的概念) 已知三個三位數

$a_1a_2a_3, b_1b_2b_3, c_1c_2c_3$ 都是 17 的倍數，證明行列式



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

也是 17 的倍數。

將行列式的第一行乘以 100，第二行乘以 10，然後將它們加到第三行得到

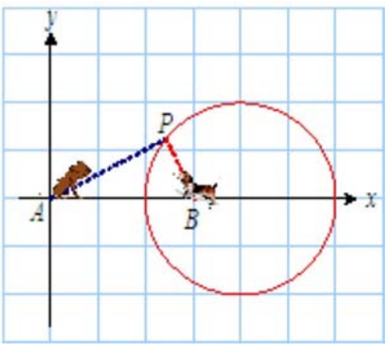
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 100a_1+10a_2+a_3 \\ b_1 & b_2 & 100b_1+10b_2+b_3 \\ c_1 & c_2 & 100c_1+10c_2+c_3 \end{vmatrix}.$$

因為最後一行的三個三位數

$$100a_1+10a_2+a_3=a_1a_2a_3$$
$$100b_1+10b_2+b_3=b_1b_2b_3$$
$$100c_1+10c_2+c_3=c_1c_2c_3$$

都是 17 的倍數，所以行列式的值為 17 的倍數（根據行列式的基本操作，可以提出 17 來，故為 17 的倍數）。

題目：(使用圓方程式的概念) 獵人養了大小兩隻獵犬，每次狩獵時，都讓兩獵犬守候在相距 3 公里的兩位置上。當獵人射下獵物時，兩獵犬會同時向著獵物直衝過去。



若大獵犬的速度是小獵犬的 2 倍，則

(1) 兩獵犬會同時抵達獵物的所有可能點 P 會構成什麼圖形？

(2) 求小獵犬會先追到獵物的範圍區域面積。

(1) 設大獵犬與小獵犬分別在$A(0,0), B(3,0)$兩點守候，兩獵犬會同時抵達獵物的點為 $P(x,y)$。因為大獵犬的速度是小獵犬的 2 倍，所以$\overline{PA}=2\overline{PB}$。

利用距離公式得

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}.$$

兩邊平方，得

$$x^2+y^2=4\left((x-3)^2+(y-0)^2\right).$$

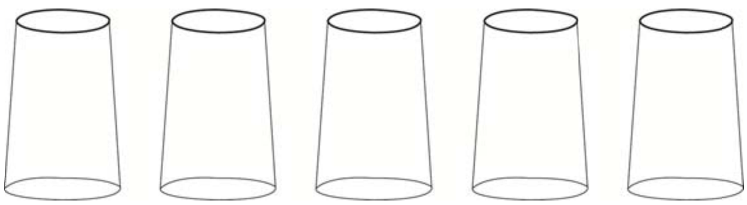
整理得

$$3x^2+3y^2-24x+36=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y-0)^2=2^2.$$

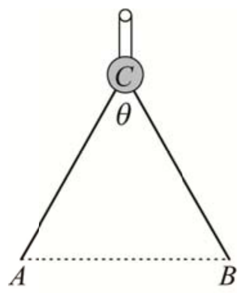
故所有可能P點所成的圖形為一圓，圓心$(4,0)$，半徑為 2。

(2) 小獵犬會先追到獵物的範圍即圓$(x-4)^2+(y-0)^2=2^2$的內部，其面積為4π平方公里。

練習 4 (使用$+1$與-1的概念) 桌上有五只茶杯，杯口都朝下，每次運動只能將兩只茶杯翻轉。請問有辦法在若干次運動之後，讓所有的茶杯杯口都朝上嗎？



練習 5 (使用面積公式) 如下圖所示，圓規的柄長$CA=CB=8$，當圓規張開的張角為θ時，會圍出一個三角形ABC。問：當θ為何值時，三角形ABC的面積最大，是多少？



練習 6 (使用餘弦定理) 已知三角形 ABC 的邊長 $AB=c, BC=a, CA=b$ 及 $\angle C=30^{\circ}$，證明 a,b,c 不可能全為正整數。

練習 7 (使用行列式) 已知兩位數 a_1a_2 與 b_1b_2 都是 7 的倍數，證明

$$a_1\times b_2-a_2\times b_1$$

也是 7 的倍數。

每當數學概念被引入真實的世界裡，數學概念被使用在日常生活中，數學概念被運用在各式各樣的研究時，我們是愉快的，美滿的，也是幸福的，因為此時，人才是主人，數學只是工具，是人在使用數學；但是，當你為了考試在背誦數學概念與公式時，在做很多無聊的習題時，在接受補習老師的應試密技時，一定是不愉快的，因為此時，數學變成主人，你反倒成為數學的奴隸，你被數學所使用了。

使用數學，不要被數學所使用的練習題解答

練習 1

將兩尺的 1, 1 兩點連線，0, 0 兩點連線，這兩條線的交點之鉛直線位置，就是同一刻度。

練習 2

從題目知道，只要是邊長 p 的凸 n 邊形島國，它的領海都是

$$pd+\pi d^2=(p+\pi d)d.$$

因為這個值跟 n 無關，所以若將 n 取至很大時，凸 n 邊形島國就近似於周長 p 的圓形島嶼，而其領海面積還是 $(p+\pi d)d$。因此，猜想答案還是 $(p+\pi d)d$。驗證如下：令周長 p 的圓形島嶼之半徑為 r，由 $2\pi r=p$ 得到 $r=\dfrac{p}{2\pi}$。圓形島嶼的領海面積為

$$\pi(r+d)^2-\pi r^2=2\pi rd+\pi d^2=pd+\pi d^2=(p+\pi d)d.$$

練習 3

答案：$\gamma\geq\beta\geq\alpha$。

練習 4

將杯口朝下的杯子定義為 -1，杯口朝上的杯子定義為 $+1$。剛開始，因為五只茶杯的杯口都朝下，所以有五個 -1，其乘積 $(-1)^5=-1$。每操作一次，會有兩個杯子的杯口改變，也就是，兩個數字變號。這意味著，其乘積不會改變，也就是說，無論操作幾次，五只茶杯的正負乘積仍然是 -1。所以不可能讓背口都朝上（此種情況需乘積為 $+1$）。

練習 5

利用面積公式$\Delta ABC=\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot\overline{CB}\sin C$，得三角形$ABC$的面積為

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\sin\theta=32\sin\theta.$$

當$\theta=90^{\circ}$時，三角形ABC的面積有最大值 32。

練習 6

利用餘弦定理，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 30^{\circ}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}.$$

如果a,b,c都是正整數，那麼$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$是分數，與$\sqrt{3}$是無理數矛盾。所以a,b,c不可能全為正整數。

練習 7

將行列式的第一行乘以 10，然後將它們加到第二行得到

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 10a_1+a_2 \\ b_1 & 10b_1+b_2 \end{vmatrix}.$$

因為最後一行的兩個二位數

$$\begin{aligned} 10a_1+a_2&=a_1a_2 \\ 10b_1+b_2&=b_1b_2 \end{aligned}$$

都是 7 的倍數，所以行列式的值為 7 的倍數（根據行列式的基本操作，可以提出 7 來，故為 7 的倍數）。故$a_1\times b_2-a_2\times b_1$是 7 的倍數。

〔註〕本問題也可以利用$d\,|\,a,d\,|\,b\Rightarrow d\,|\,(am+bn)$的公式推導。