

## 24 頭腦與心靈的數學…夢裡不知身是客，一晌貪歡又何妨

「好像在做一份數學考卷，考卷似乎有十三個題目，或者更多，也許較少。看上去，前面七、八題是選擇題，後面是計算證明題。正逐題往下做，發現選擇題的選項分佈很怪，就像

六、在空間向量中，…。請選出正確的選項：

(3)  $b=5$     (2)  $a=\pi$     (5) …… (1)  $c=4$     (4) ……

這樣的分配。好像每題選擇題的選項都長成這種怪模樣。

接下來，做計算證明題

九、證明

$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C).$$

好像在答案卷上寫著這道題目的證明過程。當寫到一半時，不知從哪裡傳來奇怪聲音「它跟二次函數有關」。然後，停筆下來，…。又傳來聲音「考卷題目出得很差，沒有達到水準！」接著就醒轉過來了，這是我最近做的一個有關數學的夢。大概最近編寫會議正在進行空間向量的部分，以及排列組合那章的集合概念也正在進行，擔心這兩個部分寫不好，才作出這樣的夢。夢的特色就是：作夢當下以為是真有其事，但是夢境卻很模糊，沒有邏輯，轉換場景沒道理，醒來不易記得。

清醒、睡眠與作夢是頭腦的三種狀態，將作夢從睡眠狀態中區分出來，是睡夢科學家在腦部造影技術這種新科技幫助之下，所帶來的研究成果。當人類或哺乳動物進入沈睡時，眼珠是不太運動的，這時的睡眠稱為非快速眼動睡眠，但作夢時，眼珠常常左右快速運動，稱這種作夢的睡眠狀態為快速眼動睡眠。如果家裡有剛出生的嬰兒，觀察他睡眠時的眼珠運動，將會發現有一半左右的睡眠時間，他都屬於作夢的快速眼動睡眠。然後，隨著年紀的增長，快速眼動睡眠的時間越來越少，直到幾乎消失。

談到作夢就讓我們想到佛洛伊德在一九〇〇年出版的《夢的解析》這本書。在佛洛伊德出版《夢的解析》之前，人類常把所作的夢當成神諭或預告未來即將發生的事件看待。

上個世紀初期，當印度數學家拉馬奴姜在英國留學時，他的老師哈代就常常好奇的問說：「你每天早上一起床，就寫下這麼多的恆等式，到底是如何發生的？」拉馬奴姜總是說「那些是昨晚神明托夢給我的。」例如

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3(\sqrt[3]{9}-2)}{2}};$$

$$\sqrt[3]{\sec 40^\circ} + \sqrt[3]{\sec 80^\circ} - \sqrt[3]{\sec 20^\circ} = \sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-1)}$$

就是拉馬奴姜發現的眾多恆等式中，高中生可以看懂，但不會證明的兩道恆等式。又如北宋沈括在三十至四十歲時，經常夢到溪邊的一塊擁有美景的土地，過了十年之後，夢裡的桃花源竟然出現在實景裡，於是沈括就買下這地方，並在那兒寫下有名的書籍，取名為《夢溪筆談》。諸如此類的傳說不勝枚舉，在《夢的解析》裡也提到過與音樂有關的故事，據說義大利小提琴家塔提尼夢見「他將靈魂賣給魔鬼後，就抓起一把小提琴，以爐火純青的技巧演奏了一首極其美妙的奏鳴曲。」醒來後，他立即寫下他所能記憶的部分，結果寫成那有名的《魔鬼的顫音》。在《基因組圖譜解密》一書中，作者也提到化學元素週期表的發現者門德列夫，在一八六九年二月的一天夜裡，作了個夢，夢裡看見已知的元素都排在一張表上。次月門德列夫就發表了今天所謂的化學元素週期表。又德國化學家柯庫勒在一八九〇年的一場科學會議中，也描述他發現苯環的經歷說「一八六四年冬的某一天，坐在壁爐前打了個瞌睡，原子和分子們開始在幻覺中跳舞，夢到六個碳原子化形為一條咬著自己尾巴的蛇，在我眼前旋轉，我感覺像是被閃電擊中，就醒了過來。」

佛洛伊德認為作夢是潛意識裡“願望的達成”，由於白天意識的把關與監視，只有在夜晚才比較容易透過偽裝的夢透露出來。就是因為佛洛伊德「監視·偽裝」的說法，所以釋夢或分析夢境內容就變得格外重要了。佛洛伊德的書名《夢的解析》也是這樣取來的。同時，這也是過去一百年來心理學家對待作夢的處理方式。

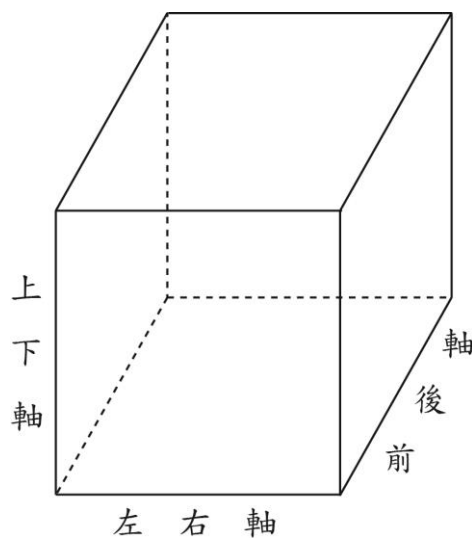
隨著睡夢科學的進展（以分析夢的形式為準，不是像佛洛伊德，重視夢的內容）以及人類對腦的誤解之修正，發現腦在白天與晚上分別受到不同化學系統的控制而運轉，白天

是胺系統所為，晚上則進入膽鹼系統的範圍。霍布森在《夢與瘋狂》與《夢的新解析》兩本書裡大膽的預言（很多已得到小心求證）：作夢是白天學習記憶的反芻與整理，也是醒轉前對頭腦的熱機與測試。作夢只是腦部運轉的一部分，也就是說，霍布森認為心靈就是頭腦，瞭解頭腦的運轉才是整個重點。這是對世上具有宗教信仰人士的一大挑戰。這裡我們來談談頭腦、心靈與數學相關的部分。事實上，它與立體幾何的正立方體，機率及統計學裡的鐘形曲線，散佈圖都有所關連。

#### 24.1 頭腦狀態的正立方體數學模型…腦心正立方體

立體幾何是高中數學中，學生學習比較困難的部分，這可從歷屆大考立體幾何試題的答對率看出。也因為這樣，立體幾何題也都出得比較簡單，而正立方體模型是最常入題的題目之一。除了學生很熟悉正立方體的數學知識外，正立方體在科學研究上也扮演著極為重要的角色。這裡就要介紹腦心科學家如何透過正立方體這個三維的幾何模型，來闡釋頭腦與心靈的大學問。

腦心科學家想要將此刻你的頭腦狀態與模型上的點作一一對應的關係。由於頭腦是三維構造，正立方體顯然是個恰當的人選。腦心科學稱這模型為腦心正立方體模型，如下圖所示：此模型由左右軸、前後軸與上下軸三軸所組成，至於三維軸所分別代表的意義及相關位置解釋如下。



▲腦心正立方體模型

- ①（左右軸，數學軸）標示整體腦神經元（腦細胞）活化的程度：此軸由左至右為完全不活化（沒有能量）漸進至完全活化（充滿能量）。相信運動與均衡飲食會強身健腦的人，會以充實的體育嗜好（游泳、慢跑、打球、練太極拳、學瑜珈）及均衡的營養攝取（蔬菜、水果、五穀雜糧、生機飲食）來提昇腦部的活化能量。
- ②（前後軸，物理軸）標示頭腦對物理學中聲音、影像的接收模式：腦中聲音、影像的來源不外乎外來或內生兩種。此軸由後端的處理外來聲音、影像至最前端的接收內生的聲音、影像。具有高度信仰的人會根據其教義的催眠，來活化頭腦狀態，使其關注內生聲音、影像的潛意識情況。例如佛教徒會讓自己處於清心寡欲，靜心冥想的潛意識狀態，而無神論者則專注於有聲音與影像的外在極度意識世界。
- ③（上下軸，化學軸）標示清醒或注意力集中的程度：此軸由上端的極清醒、專心、能判斷思考到最下端的分心、無法進行判斷思考的昏迷階段。腦中的不同化學系統會讓頭腦處在不同的清醒程度，例如胺系統會使頭腦清醒，膽鹼系統讓意識昏迷。此外，具有化學成分的藥物也會改變清醒狀態，難怪咖啡用來提神，迷幻藥使人昏迷，關鍵就在它們的化學成分是促進胺系統，還是活化膽鹼系統。

現在就讓我們將

- A 早上起床的最清醒狀態。
- B 非快速眼動睡眠狀態（沈睡）。
- C 快速眼動睡眠狀態（作夢）。
- D 死亡。

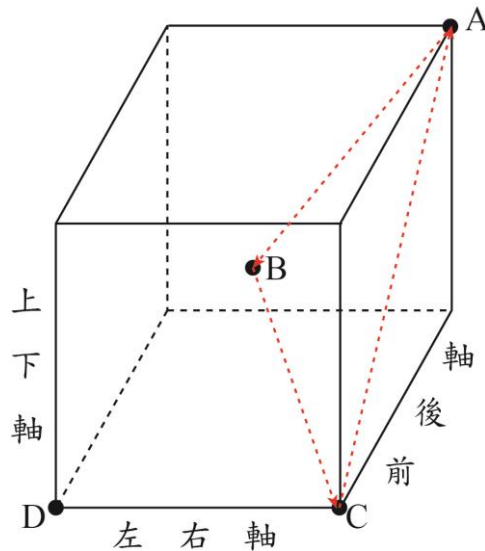
等四種腦部狀態標示於腦心正立方體模型所對應的點：

- A 因為早上起床最清醒狀態的能量旺盛（右），對外的視、聽覺意識強烈（後），清醒與專注程度極高（上），所以 A 點落於腦心正立方體模型的右後上方位置。
- B 因為沈睡時，還是必須偵測外來的威脅，清醒狀態的適中（中），外來與內生的視聽覺皆無，處於無意識（中），清醒與專注程度也居中（中），所以 B 點落於腦心正立方體模型的中心位置。
- C 因為作夢需要極大的能量，而這些能量是腦部自行活化產生的，所以此時能量旺盛

(右)，又是睡眠狀態，視、聽覺是內生（幻覺與幻聽）的潛意識掌控（前），而作夢的時屬於昏迷狀態（下）。故 C 點落於腦心正立方體模型的右前下方位置。

D 因為死亡時毫無能量（左），處於視聽覺內生的潛意識裡（前），昏迷指數最大（下），所以 D 點落於腦心正立方體模型的左前下方位置。

這四種點 A, B, C, D 剛好落在如下腦心正立方體模型所指示的位置上：



事實上，一個正常人早上清醒時頭腦處於 A 點，隨著時間的過去，能量、意識、清醒度逐漸下降，到了晚上睡眠時就落在 B 點（正立方體模型的中心位置），接著隨著熟睡進入作夢的夢鄉 C 點，然後醒轉，快速回到 A 點，繼續另一天的開始。這就是正常人的精神狀態在模型中所走的路徑。它呈現的是一個區域不小的三角形。有些生了病的人，繞行的區域相當小，如憂鬱症病人，每天昏沈沈想睡覺，又沒辦法沈睡，這是因為憂鬱症病人整天的頭腦都在快速眼動睡眠的 C 點附近徘徊。

## 24.2 一些特殊精神狀態的對應點

除了前一節介紹的

A 早上起床的最清醒狀態。

B 非眼動睡眠狀態（沈睡）。

C 眼動睡眠狀態（作夢）。

D 死亡。

等四種精神狀態外，讓我們進一步標示如下的精神狀態，在腦心正立方體模型上所該對應的點：

E 瘋子（精神病患）。

F 過動兒。

G 夢遊狀態。

H 老年痴呆症者。

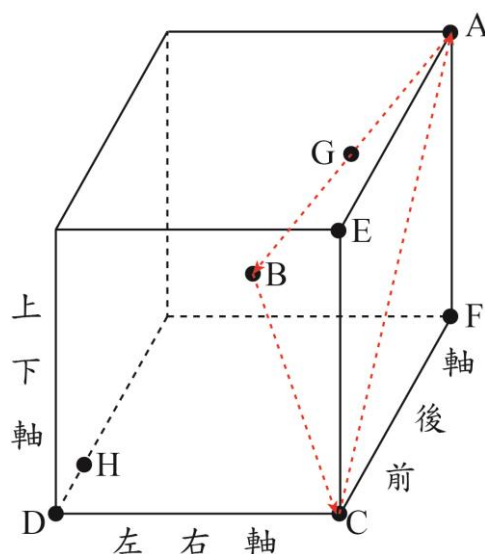
讓我們分析 E, F, G, H 四點所對應的位置：

E 因為瘋子（精神病患）的能量旺盛（右），具有強烈幻覺與幻想潛意識（前），頭腦是清醒狀態（上），所以 E 點落於腦心正立方體模型的右前上方位置。

F 因為過動兒的症狀是無法集中注意力在同一件事情上太久，容易分心，所以毛毛噪噪，功課不好，所以過動兒能量旺盛（右），具有強烈外在視覺與聽覺意識（後），極度不能把注意力集中（下）。也就是說，F 點落於腦心正立方體模型的右後下方位置。

G 夢遊並非一般人所誤解的作夢，又起身走動的意思，它是半睡半醒的狀態，腦神經元有一半處於沈睡，另一半在清醒的奇怪狀態，夢遊者並非再作夢。也就是說，G 點位於清醒 A 與沈睡 B 兩點連線的中間。

H 老年痴呆的特徵為身體的壽命超過腦細胞壽命所引起的腦細胞已經大量不活化或者死亡。因此老年痴呆者沒有能量（左），微處於視聽覺內生的潛意識裡（前），不清醒，注意力無法集中（下），故 H 點落於腦心正立方體模型的左微前下方位置。



## 練習 1 得道師父的

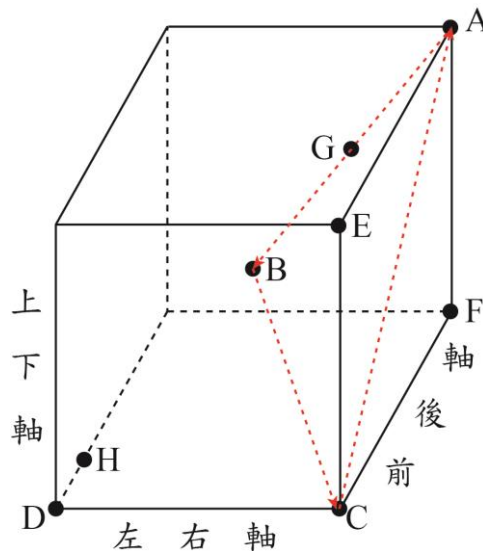
冥想狀態

位於腦心正立方體模型中的那一位置。

### 24.3 頭腦與心靈的數學…立體幾何、機率與統計

#### 24.3.1 腦心正立方體的數學

- ① 從腦心正立方體模型中不難發現，作夢者 C 與瘋子 E 距離很近，他們的差別也許只是作夢者晚上作夢，瘋子清醒時就開始作夢之別而已。難怪佛洛伊德與容格會說「清醒時作夢就是瘋子。」



- ② 再從模型中知道：清醒者 A 與過動兒 F 的距離亦不遠，這是因為過動兒只是無法專心的清醒者而已。所以讓過動兒正常上課的最好方法也許是請他喝一杯咖啡吧！這樣可以提神，集中注意力。
- ③ 既然正常健康的人是沿著  $A \rightarrow B \rightarrow C$  路徑循環，就讓我們來算算  $\angle ABC$  的餘弦值好了：將中心 B 設為原點  $(0,0,0)$ ，令立方體的邊長是 2，此時可得  $A(-1,1,1)$  與  $C(1,1,-1)$ 。由空間向量  $\overrightarrow{BA} = (-1,1,1)$  與  $\overrightarrow{BC} = (1,1,-1)$  的內積，得

$$|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1,$$

即

$$\cos \angle ABC = \frac{-1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}.$$

### 24.3.2 作夢與機率、統計的關係

最近無意間逛進一個叫〈曉風殘月〉的個人網站，看到她寫一篇有關自己很會作夢的文章，她寫道「…夢裡的自己也不知道一切只是夢，驚恐、痛苦、害怕、悲傷…… 每種感覺都那麼真實…」。

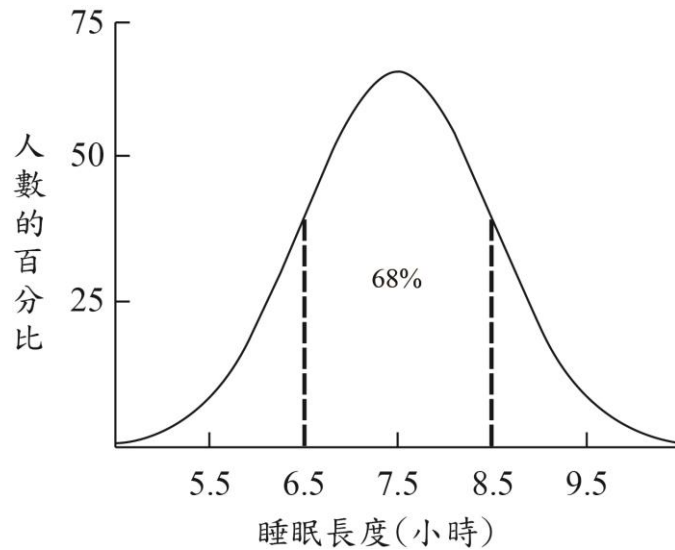
如果她讀了霍布森的兩本書《夢與瘋狂》與《夢的新解析》，她將會很高興，因為她是一個完全正常且健康的人（只是帶有一點憂鬱），她作的是既標準又典型的夢，而且多夢也是健康的。

人類是哺乳動物的一種，凡是動物都要靠競爭才能生存，靠繁殖才有後代。當你碰到人或其它動物的威脅時，只有逃跑、視若無睹與跟牠搏鬥三種選擇。無論選擇那種應對方式都會有另外的兩種反對你，也就是說，只有 $\frac{1}{3}$ 覺得你的決定是正確的，有高達 $\frac{2}{3}$ 認為你是錯的。這個比例和人作夢的情緒比例相當一致，根據統計，作驚恐、痛苦、害怕、悲傷與焦慮的夢的機率高達 $\frac{2}{3}$ ，作心情愉快、快樂與高興的夢之機率只有 $\frac{1}{3}$ 。

每個人每天睡眠時間都不一樣，究竟睡眠時間長度這個分佈會是那種曲線呢？大考中心一直希望出題教授命的試題，經考試之後所得的成績分佈是一個鐘型曲線，但經常不是，例如英文科常受城鄉差距（官方說法）的影響，產生雙峰現象。就是沒有城鄉差距的影響，要命一份鐘型曲線分佈的試題也是不容易的事情。但是，生物一些本能反映的數據，卻會是標標準準的鐘型曲線分佈，人類睡眠時數的統計資料就是一個很好的例子。就讓我們複習一下什麼是數學家高斯所發現的「鐘型曲線」吧！鐘型曲線（也稱為常態分佈曲線或高斯分佈曲線），是一個中間拱起，兩端下陷，大多數的數據集中在中間，極端的數據所佔比例極小的左右對稱曲線。拱起的最高點是所有數據的平均值，而有68%的數據落在距離平均值一個標準差內，有95%的數據落在距離平均值兩個標準差內，有99.7%的數據落在距離平均值三個標準差內。

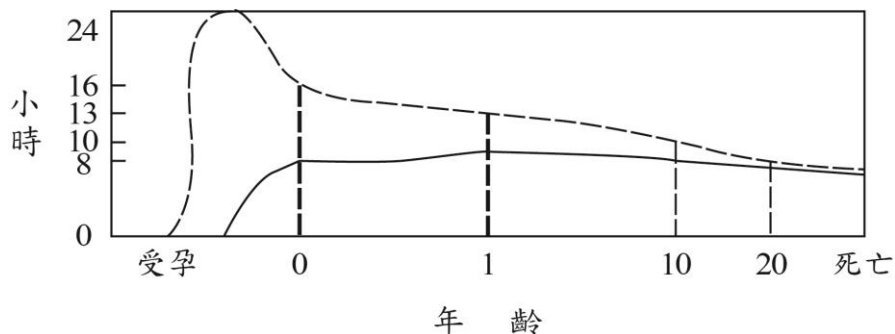
從睡眠實驗室的數據證實，如果將人的睡眠以時數做統計，那麼所得結果會是一個鐘型曲線。統計得平均值約為7.5（小時），標準差大概是1（小時）：





睡眠實驗室的數據也顯示出，一天二十四小時當中，分配給清醒時刻，快速眼動睡眠（作夢）時間與非快速眼動睡眠（沈睡）時間的比例，如下圖所示：

- ① 虛線是指快速眼動睡眠曲線，實線是指非快速眼動睡眠曲線。
- ② 虛線之上為清醒時間，虛線與實線之間為快速眼動睡眠時間，實線之下為非快速眼動睡眠時間。



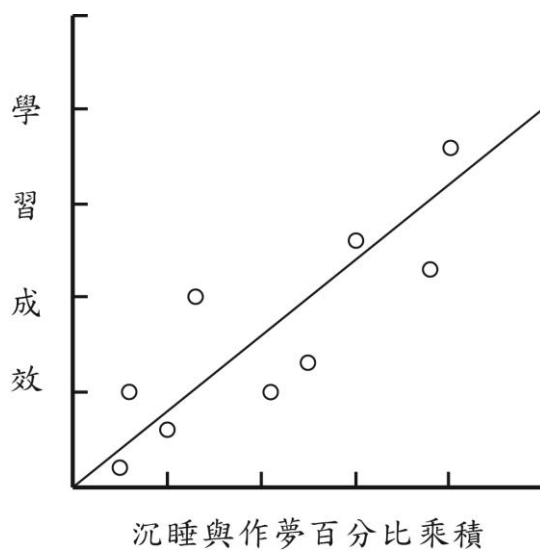
嬰兒剛出生時，清醒時刻，快速眼動睡眠時間與非快速眼動睡眠時間各佔三分之一，隨著年齡的增長，清醒的時間逐漸增長，並維持這樣的趨勢直到死亡。為什麼嬰兒到孩童時期，他們的快速眼動睡眠（作夢）時間比起大人多出許多呢？這跟人的學習記憶有很深的關係。一直以來，人們都認為人腦跟現在的電腦相當，會將學來的資料分門別類擺放在一塊，性質相似的放一起。也許是人們先有這樣對頭腦的誤解，才將電腦的儲存發明成這個樣子。事實上，當我們白天學習事情或記憶知識時，這些記憶會先暫存在海馬體裡，當晚上快速眼動睡眠時，會將這些記憶深化，且分佈在頭腦的不同部分，以方便將來腦神經網絡搜尋的方式儲存，這樣才算是永久的記憶。快速眼動睡眠（作夢）除了

對學習作長久記憶整理之外，它也從事類似電腦測試與暖機的功能，作夢就是其中的測試功能。作夢內容是從頭腦儲存裡隨機抽取的材料，經過構思出來的測試報告。因為是測試，所以作夢時頭腦會自動解除肢體動作與記憶部分。也因為這樣，夢裡的自己也不知道一切只是夢，每種感覺都那麼真實，但就是少有肢體動作，醒轉之後記憶也很少，因為只是測試啦。人腦與電腦最大的差別在於人腦是一種富有彈性與多元的思考，而電腦只是依循邏輯而行事的機器罷了。就如同波爾曾告誡過一位學生「你並不是在思考，你只是依循邏輯而行事罷了」的話一樣。

我們知道作夢就是在暖機，測試及深化白天學習的記憶，顯然每日作夢或快速眼動睡眠時間越長越好。睡眠科學家發現底下兩個百分比乘積

$$\frac{\text{非快速眼動睡眠時間}}{\text{睡眠總時間}} \times \frac{\text{快速眼動睡眠時間}}{\text{睡眠總時間}}$$

所產生的數據  $x$  與學習成效  $y$  所呈現的散佈圖是完全正相關的：



**練習 2** 根據本節的圖示，論述：

- (1) 人的一生，何時學習成效最好。
- (2) 快速眼動睡眠時間隨著年齡增大，而趨近於零的意義。

### 24.3.3 我夢，故我在

「夢裡不知身是客，一晌貪歡」是南唐李後主〈浪淘沙〉詩中的句子，意指亡國被囚禁的哀怨。但在今日，用它來描述作夢的科學更貼切不過。作夢時，每種感覺都那麼真實，讓我們誤以為真，但實際上，它只是一種隨機測試與增進學習記憶的方式，肢體動作，思考，意志力被解除，身體只是個客人，頭腦才是主人，醒轉之後，夢境內容也大都記不清楚了。既然作夢時肢體動作已被解除，那麼作場春夢又何妨呢？所以

夢裡不知身是客，一晌貪歡又何妨

是作夢的最佳寫照。

#### 參考文獻

- [1] 佛洛伊德著，賴其萬，符傳孝譯，夢的解析，志文出版社。
- [2] 卡爾文著，陳雅茜譯，大腦如何思考，天下文化。
- [3] 格林菲爾德著，陳慧雯譯，大腦小宇宙，天下文化。
- [4] 丹尼特著，陳瑞清譯，萬種心靈，天下文化。
- [5] 霍布森著，朱芳琳譯，夢與瘋狂，天下文化。
- [6] 霍布森著，潘震澤譯，夢的新解析…承繼佛洛伊德的未竟之業，天下文化。

# 頭腦與心靈的數學…夢裡不知身是客，一晌貪歡又何妨的練習

## 題解答

### 練習 2

〔解〕分析 I, J, K 三點所對應的位置如下：

I 真神棍是存心騙人的假道士，頭腦屬清醒的狀態（上），會利用靈性騙人可能具有潛意識的特質，視覺與聽覺可能內生（前），腦神經能量中等活化（中）。所以 I 點落於腦心正立方體模型的中前上方位置。

J 假神棍就是天生具有很強內生視覺與聽覺（前），長期不清醒（下），腦神經能量中等活化（中）的人，類似被催眠者。所以 J 點落於腦心正立方體模型的中前下方位置與被催眠者同一位置。

K 師父的能量溫和適中（中），視聽覺完全處於內生的潛意識為主（前），清醒與集中注意力適中（中），所以 K 點落於腦心正立方體模型的中前中方位置。

