23 隱藏的和諧比看得見的和諧來得好…隱藏在天平上的和諧

每個學校，團體或教會都立有校規，教條或戒律。只要人人遵守這些條款，學校或團體就會和氣與和諧。但是，可曾想過，如果沒有這些白紙黑字的規矩，那麼和諧還會存在嗎？如果會，那又何必立這些規矩或條款呢？所以這些看得見的和諧僅是表面的、膚淺的，事實上應該說這些看得見的和諧根本就是不和諧的意思。所以我們要追求的，並不是這種看得見的和諧，而是隱身在後的那種隱藏的和諧。想想看，我們彎曲的背脊中，一定有某種隱藏的和諧存在，否則天天彎曲扭轉它，為何它不容易受傷或折斷呢？所以兩千多年前的希臘哲學家赫拉克利特就說過「隱藏的和諧比看得見的和諧來得好。」

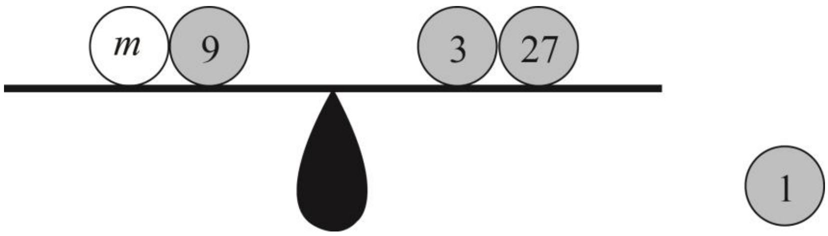
《數學傳播季刊》是適合高中以上程度讀的數學刊物，也是國內出版的少數中文數學刊物之一。季刊的稿件是由國內數學專家審查，有幾次我也審查過它們的文章。最近一次是審查一篇利用天平解決一道龍騰《數學新天地》問題集裡的題目。「當天平平衡時，天平兩邊的重量相等」，這是大家都清楚的一個原理。但是，你可曾知道，這麼簡單的原理背後卻隱藏著深刻的數學和諧。挖掘隱藏的和諧是學數學的一大樂趣，也是科學研究的重要目標。這裡要介紹的這位奇人，不僅深諳天平裡的和諧，也將這和諧應用在一道與減法有關的數字分群問題上。

23.1 梅齊里亞克的砝碼問題

「槓桿原理」和「力矩」的觀念是阿基米德發現的，天平是反應這些觀念的實際工具，這裡我們要介紹一道與這些觀念相關的砝碼問題：

一位商人有一個 40 磅的砝碼，由於跌落在地而碎成四塊。後來，秤得每塊碎片的重量都是整數磅，而且可以用這四塊來秤從 1 至 40 磅之間的任意整數磅重物（某些砝碼可以與秤物放在天平同一邊的秤盤裡）。問這四塊砝碼碎片各重多少？這就是有名的巴舍・德・梅齊里亞克的砝碼問題。

如下圖所示，令四塊砝碼碎片各重$1,3,9,27$磅，秤物重m磅。利用「天平平衡代表左、右秤盤等重」原理得知$m+9=3+27$，也就是說，秤物重$m=3+27-9=21$磅。



▲ 天平兩邊秤盤放置砝碼與秤物的示意圖

上圖中並沒有用到 1 磅重的砝碼，所以將它放置在天平的左、右秤盤外。為了真實的反應左、右秤盤裡的砝碼及秤盤外的砝碼，我們可以將秤物重m重新寫成

$$m=0\cdot 1+1\cdot 3+(-1)\cdot 9+1\cdot 27$$

的形式，其中係數 0 的砝碼代表未被使用的砝碼，係數 1 的砝碼代表放在右秤盤砝碼，係數-1的砝碼代表放在左秤盤砝碼。

〈梅齊里亞克的砝碼問題〉

使用磅數為$1,3,9,27$磅的四個砝碼可以秤得從 1 至 40 磅之間的任意整數磅秤物。

因為 1 磅重的砝碼可以放在左秤盤裡、右秤盤裡或秤盤外三種情形，同理，$3,9,27$ 磅重的砝碼也都各有三種不同的放法。所以四塊砝碼一共有

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$$

種放法。有幾個小問題需要解決：

① 四塊砝碼可以秤最重的秤物是幾磅。

② 磅數 m 的秤物會不會有兩種不同的秤法呢？

③ 因為秤物放置在左秤盤，而且秤物的重量是正整數磅，所以左秤盤的砝碼總重必須小於右秤盤的砝碼總重。上述 81 種砝碼放法中有幾種符合這原則。

將 $1,3,9,27$ 磅這四個砝碼都放在右秤盤時，秤物的重量（磅）為

$$m=1+3+9+27=40.$$

顯然的，這是四塊砝碼可以秤得最重的秤物重量，如此解決了①的問題。

接著討論②：如果 m 可以有兩種不同的秤法，那麼代表

$$m=a_0\cdot 1+a_1\cdot 3^1+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3=b_0\cdot 1+b_1\cdot 3^1+b_2\cdot 3^2+b_3\cdot 3^3$$

有兩種不同的解 a_i 與 b_i，其中 a_i 與 b_i 都是 $-1,0,1$ 的數。但是將 m 除以 3，從 a_i 得餘數為 a_0，從 b_i 得餘數為 b_0。所以 $a_0=b_0$。將兩式各減去 $a_0=b_0$，再除以 3 得

$$a_1\cdot 1+a_2\cdot 3^1+a_3\cdot 3^2=b_1\cdot 1+b_2\cdot 3^1+b_3\cdot 3^2.$$

同法（除以 3，求餘數）可得 $a_1=b_1$。依此類推 $a_2=b_2, a_3=b_3$。這告訴我們：任何磅數 m 的秤法不可能有兩種（至多一種）。

最後探討③：當所有四個砝碼都不放在左、右秤盤上時，不需要秤物（或秤物 $m=0$）天平會平衡，除了這種放法之外，任何一種放法不是左秤盤比較重，就是右秤盤比較重。所以 81 種砝碼放法中，左秤盤的砝碼總重大於右秤盤的砝碼總重的放法有

$$\frac{81-1}{2}=40$$

種，也就是說，有 40 種不同的砝碼放法可以量得秤物重量（要求秤物為正整數磅，且秤物放在左秤盤）。

綜合①、②、③知道：81種砝碼擺放方式中，有40種可以秤得左秤盤上的秤物重量，每種擺法秤得的重量都不同，而且重量介於1至40磅之間。這就是說，使用磅數為$1,3,9,27$磅的四個砝碼可以秤得從1至40磅之間的任意整數磅秤物，而且秤法都只有唯一的一種。

有關巴舍・德・梅齊里亞克的砝碼問題，有底下四件事情需要補充：

(1) 如何秤$m=25$磅的秤物，也就是解

$$25=a_0\cdot 1+a_1\cdot 3^1+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3$$

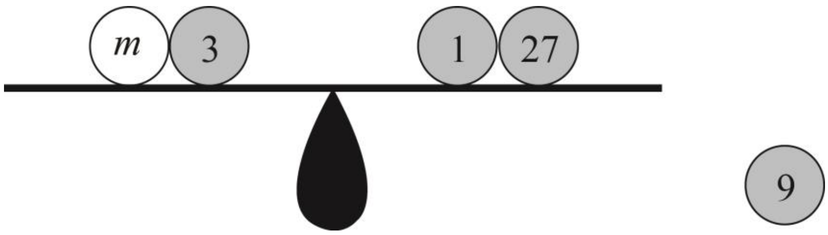
的意思，但要求a_0,a_1,a_2,a_3只能是$-1,0$或1的數。將兩邊除以3得餘數分別為1與a_0，即$a_0=1$。此時，等式可化簡為

$$8=a_1\cdot 1+a_2\cdot 3^1+a_3\cdot 3^2.$$

同法可得$a_1=-1,a_2=0,a_3=1$，即

$$25=1\cdot 3^0-1\cdot 3^1+0\cdot 3^2+1\cdot 3^3,$$

其對應的示意圖為



(2) 除了像(1)這樣的方法求得係數外，也可以利用3進位來求$m=25$的表示式。因為25的3進位表示法為

$$1\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2.$$

將表示法中的係數2用$-1+3$取代，得到

$$\begin{aligned}25&=1\cdot 3^0+(-1+3)\cdot 3^1+(-1+3)\cdot 3^2\\&=1\cdot 3^0-1\cdot 3^1+1\cdot 3^2-1\cdot 3^2+1\cdot 3^3\\&=1\cdot 3^0-1\cdot 3^1+0\cdot 3^2+1\cdot 3^3,\end{aligned}$$

這就是$m=25$的表示式。

(3) 梅齊里亞克的砝碼問題可以推廣為：使用磅數為

$$1,3^1,3^2,3^3,\cdots,3^n$$

磅的$n+1$個砝碼可以秤得從 1 至$\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$磅之間的任意整數磅秤物。

(4) 如果只能使用$1,3,9$磅的砝碼，那麼可以秤得從 1 至 13 磅之間的任意整數磅秤物。

23.2 一道數字的分群問題

當砝碼可以放置在天平的兩邊秤盤時，可以秤的秤物重量m就豐富許多了。但是，這裡面是否還隱藏著一些你沒想到的數學呢？就從底下的這道題目開始吧！

題目：將

$$1,2,3,4,\cdots,13$$

這十三個數字分成三群，使每群中的任兩個數字差都不在該群內。

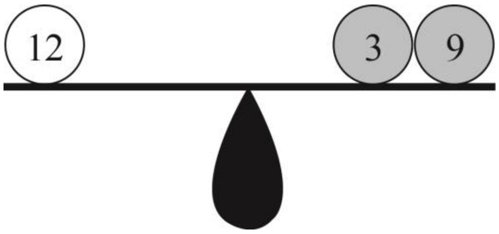
這是龍騰數學新天地第十二期《問題集》中的一道問題。分法有許多種，本人原本是希望讀者採取土法煉鋼的方法，沒想到有一位高中老師將本問題與梅齊里亞克的砝碼問題連結，得到這問題的另一種有系統且完整的妙解。就讓我們來欣賞這位奇人突如其來的妙想。

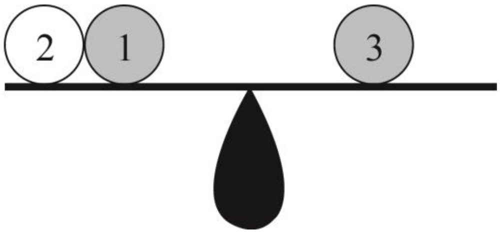
〔高中老師的妙想〕

梅齊里亞克的砝碼問題告訴我們，用$1=3^0,3=3^1,9=3^2$ 的砝碼就可以秤出$1,2,3,\cdots,13$這十三個數字。例如

$$\begin{aligned}2&=-1\cdot 3^0+1\cdot 3^1+0\cdot 3^2;\\ 12&=0\cdot 3^0+1\cdot 3^1+1\cdot 3^2.\end{aligned}$$

這兩個例子所代表的天平示意圖為：

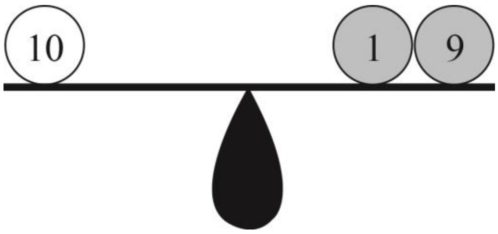




從示意圖發現，$m=2$與 12 所對應的右秤盤最輕的砝碼都是 3。我們就用右秤盤最輕的砝碼來分類，一共會有三類，分別是右秤盤最輕的砝碼為$1,3,9$三類。現在將 1 至 13 依其示意圖右秤盤最輕的砝碼分類如下：

右秤盤最輕砝碼	左秤盤的秤物重 m
$1=3^0$	①、④、⑩、⑬
$3=3^1$	②、③、⑪、⑫
$9=3^2$	⑤、⑥、⑦、⑧、⑨

將①、②、③、⋯、⑬依上述方法分成表格裡所述的三群，我們容易驗算得知：每群中的任兩個數字差都不在該群內。事實上，也可以利用天平上擺放的砝碼來解釋。例如就以$m=12$及$m=2$為例，從上述示意圖知道，它們都是屬於第二群（右秤盤最輕砝碼為 3 的那群），它們的差$10=12-2$屬於第一群，可以想成兩個示意圖右秤盤都有砝碼 3，所以會消掉。因此它們的差$10=12-2$不可能繼續停留在原來的第二群。



練習 1　將

$$1,2,3,4,\cdots,40$$

這四十個數字分成四群，使每群中的任兩個數字差都不在該群內。

練習 2　聖旨：『奉天呈運，皇帝詔約，犯人在刑場外排成一列，從左至右依序喊號

$$1,2,3,\cdots.$$

只要號碼是 3 的倍數或被 3 除，餘數為 1 者，馬上推進刑場斬立決。剩下的犯

人靠攏後，再依序重新喊號1,2,3,… ，並依此規則繼續進行下去，直到剩一犯人止。』

如果開始有 100 位犯人，那麼第一次喊幾號的犯人才有機會說“謝主隆恩”呢？

隱藏的和諧比看得見的和諧來得好…隱藏在天平上的和諧的練習題解答

練習 1

右秤盤最輕砝碼	左秤盤的秤物重 m
$1=3^0$	①、④、⑩、⑬、㉘、㉛、㊲、㊵
$3=3^1$	②、③、⑪、⑫、㉙、㉚、㊳、㊴
$9=3^2$	⑤、⑥、⑦、⑧、⑨、㉜、㉝、㉞、㉟、㊱
$27=3^3$	⑭、⑮、⑯、⑰、⑱、⑲、⑳、⑧、⑨、㉑ ㉒、㉓、㉔、㉕、㉖、㉗

練習 2

第一次喊$-1-3-9-27+81=41$號的犯人最後會被留下來。