22 一道古怪的遞迴數列

下列五個數字

$$38,27,41,53,13$$

一眼就看出 53 是最大的數。但是電腦沒有眼睛，很難一眼就看出最大數為何？電腦只能根據軟體人員提供的程式，按照程序比對大小，找出最大的數。事實上，如果給定的數不止 5 個，而是幾百或上千個，既使是眼睛也很難一眼看出最大數是哪一個。所以想出一個比對的好方法是必要的。既然是比對，那麼讓比對的次數越少肯定越好，越節省時間。

當給定的數是$n=1$個時，不需要比對，那個唯一的數就是最大的數；當給定的數是$n=2$個時，只需將這兩個數比對一下，就知道最大的數是誰，所以只需比對 1 次。當給定的數是$n=3$個時，可以將第一數與第二數比對，再取這兩數的較大數與第三數比對，所以只需 2 次就可以找到最大數；當給定的數是$n=4$個時，可以將 4 個數分成兩組，第一組是前兩個數所構成的，而第二組是後兩個數所構成，將第一組與第二組的最大數進行比對就可以找到最大數了，又 2 個數只需比對一次就可得到最大數，所以只需比對 3 次就可以找到四個數中的最大數。當n很大時，很難看出比對的次數要多少次，才有辦法找到最大數。這就是這裡所要討論的問題：

題目：定義數列$\langle C_n \rangle$如下：$C_1=0, C_2=1$，當n是正整數時

$$\begin{aligned} C_{2n} &= 2C_n + 1; \\ C_{2n+1} &= C_n + C_{n+1} + 1. \end{aligned}$$

給定任意的n個相異實數，只需經過C_n次的比對，就可以找出其中的最大數。

以五個數字

$$38,27,41,53,13$$

為例，先將它們分成

$$38,27 \quad 與 \quad 41,53,13$$

兩堆，其中第一堆只需比對 1 次就找到最大數 38；第二堆在比對 2 次之後，可以找到最大數 53，再將 38, 53 比對 1 次，得到最大數為 53。所以經過 1+2+1=4 次比對，可以找到最大的數。像這樣，將給定的n個實數

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

分成個數約略相等的兩堆,再將每一堆的最大數比對出來,最後才比對這兩個數的大小，這樣就找出了此n個數的最大數了。現在就讓我們研究一下數列$\langle C_n\rangle$有哪些遞迴關係：

因為C_{2n}是比對

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{2n}$$

這$2n$個數所需的比對次數，所以根據我們的方法，需先比對前n項找出最大數，再比對後n項同樣找出最大數，最後才比對這兩個最大數何者較大。因此總比對次數C_{2n}可以利用C_n來描述為

$$C_{2n}=C_n+C_n+1=2C_n+1.$$

同樣的方法，C_{2n+1}可以利用C_n,C_{n+1}來描述為

$$C_{2n+1}=C_n+C_{n+1}+1.$$

故題目的遞迴數列$\langle C_n\rangle$就是比對n個數並找到最大數，所需要的比對次數。

我們有興趣的是寫下C_n的一般項公式，根據前面的計算或者推得的遞迴關係，可知前幾項為

$$C_1=0,C_2=1,C_3=2,C_4=3,C_5=4.$$

從這些規律容易推測C_n為$n-1$。

要如何證明這個推測「$C_n = n-1$」呢？如果將比對兩數當成兩隻球隊進行必須分出勝負的比賽，輸的隊伍被淘汰（俗稱的單敗淘汰制），那麼n隻球隊需要進行多少場比賽才能產生冠軍隊伍呢？答案當然就是C_n場，找出最大數就相當於冠軍隊伍出爐一樣。但是，比賽一場會有一隻隊伍出局，想要冠軍出爐，必須有$n-1$隻隊伍被淘汰，即比賽$n-1$場，故$C_n = n-1$。

〈單敗淘汰〉

讓n隻球隊進行單敗淘汰比賽，無論如何安排賽程，都需要比賽$n-1$場才能產生冠軍隊伍。這個比賽場次的數字$n-1$也就是比對n個相異實數，得到最大數字所需的比對次數。

除了利用單敗淘汰制說明$C_n = n-1$成立外，我們也可以利用數學歸納法及C_n的遞迴關係式推得$C_n = n-1$成立。