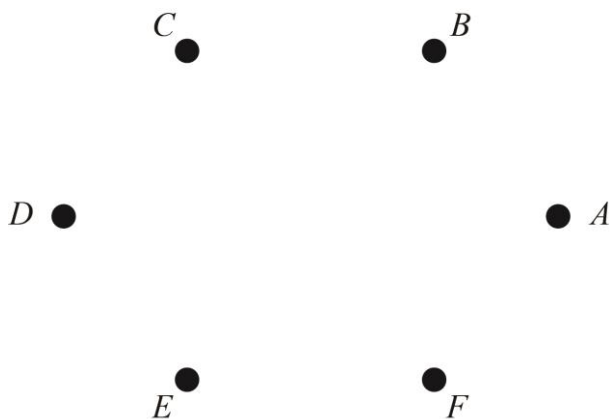


## 21 圍出三角形者輸

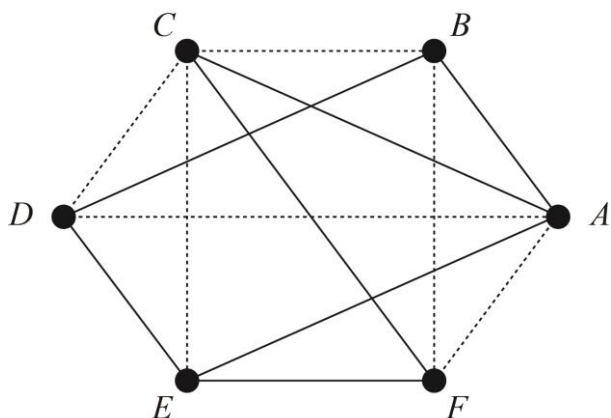
在平面上取六個點，如下圖所示的  $A, B, C, D, E, F$  六個點，任意兩點可以畫一條連接它們的線段，一共可以畫出 15 條：



圍出三角形者輸的遊戲規則：

甲、乙兩人輪流畫連接兩點的線段，甲的線段用實黑線表示，乙的線段用虛黑線代表。當一方的線可以為出一個三角形時，遊戲就結束，圍出三角形者輸。

下圖是甲、乙兩人經過六回合激戰之後的圖形，接著甲畫線段  $\overline{BD}$ ，輪到乙。



因為只剩下  $\overline{BE}$  與  $\overline{DF}$  兩條線段供乙選擇，又無論乙畫那一條，都會形成虛線三角形

(畫  $\overline{BE}$  形成  $\triangle BCE$ ；畫  $\overline{DF}$  形成  $\triangle ADF$ )，所以此遊戲由甲獲勝。

這遊戲在七回合之後，輪到甲畫下第十五條線段之後就結束了，也就是說，甲至多畫 8 條實線段，乙最多只畫 7 條虛線段。所以它是一道有限步驟之後就結束的遊戲。是否會

平手是首先要考慮的問題。

題目：「圍出三角形者輸」這道遊戲不可能平手，也就是說，不是甲會圍出實黑線三角形，就是乙必須畫出虛黑線三角形。

既然遊戲在有限回合結束，那麼遊戲不會平手的意思就是「有一方會被迫圍出三角形來」，也可以說，「將 15 條線段，隨意的把其中的 8 條畫成實黑線，另外 7 條畫成虛黑線。一定可以找到三條實黑線或者找到三條虛黑線，它們剛好圍出一個三角形」。想要瞭解最後這個敘述的證明，需先要知道一則大家心裡很清楚，但卻很不會使用的原理：

〈鴿籠原理〉

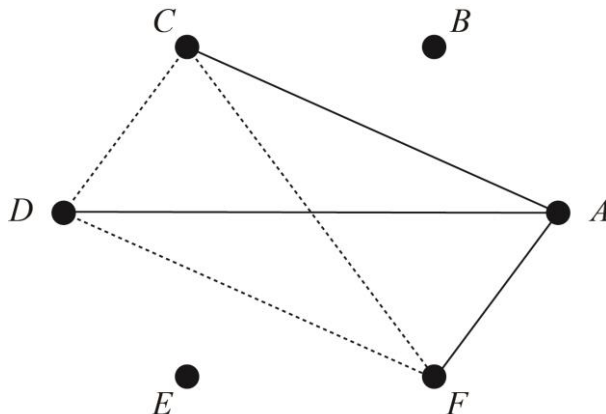
如果有實黑線與虛黑線一共 5 條，那麼至少有一種線 3 條，或 3 條以上。

鴿籠原理用鴿子與籠子的敘述為「將 5 隻鴿子關在 2 個籠子裡，一定有一個籠子關 3 隻或超過 3 隻鴿子」。現在就讓我們利用鴿籠原理來解題。因為 15 條線段中，只有實黑線與虛黑線兩種，所以五條線段

$$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$$

中，必有三條或超過三條是實黑線或虛黑線。不妨設有三條或超過三條的實黑線，如下

圖所示， $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AF}$  是三條實黑線：



現在考慮三角形  $CDF$ ，如果三條線段

$$\overline{CD}, \overline{DF}, \overline{CF}$$

都是虛黑線，那麼三角形  $CDF$  就是由虛黑線所圍出的三角形。否則， $\overline{CD}, \overline{DF}, \overline{CF}$  必有一條是實黑線，比如說  $\overline{CF}$  是實黑線，此時，三角形  $ACF$  就是由虛黑線所圍出的三角形。因此「將 15 條線段，隨意的把其中的 8 條畫成實黑線，另外 7 條畫成虛黑線。一定可以找到三條實黑線或者找到三條虛黑線，它們剛好圍出一個三角形」。也就是說，此遊戲不會平手。

既然遊戲一定會分出勝負，而且是很快就可以分出勝負，那麼究竟誰有必勝的策略呢？

〈必勝策略〉

乙（後玩者）在這 6 個點的輪流畫線段遊戲有必勝的策略。

乙有必勝的策略並不意外，因為遊戲中，甲需要畫 8 條實黑線段，而乙僅需畫 7 條虛黑線段，所以甲圍出三角形的機會較高。至於必勝策略為何？可以參考

L. E. Shader, Another strategy for SIM, *Mathematics Magazine*, Vol. 51, No. 1, pp. 60--62, 1978.

如果將遊戲的 6 個點改成其他的數字，例如 8 個點，此時線段共有 28 條，甲、乙各畫 14 條，看起來比較公平，那麼乙（後玩者）仍有必勝的策略嗎？這是值得研究的問題。