

# 1 綠衣黑裙的綠巨人

台大附近，汀州路旁，新店溪邊的師大分部是我大學讀書成長的地方，也是我從事教學、學術研究的地點。三月的暖陽從蟾蜍山上斜照全校園，來自全國的十來位數學資優學生，在數學館三樓的 M310 教室一起探索數學的奧秘，他們無暇欣賞這美景。吸收教授的數學課程，考好試，當選只有六個名額的國手才是他們此行的目的。《算術講義》是我所教授的一系列課程之統稱。在這課程裡，不僅教授代數、數論，也涵蓋一點組合、幾何與不等式。剩下十來人的課程安排，通常上課兩個小時，做練習一個小時。記得有一次，我給的練習是取自前蘇聯的一道立體幾何問題，它是一道幾何不等式問題，看起來是道難題。

學生絞盡腦汁的想這個問題，我以愉快的心情巡視並欣賞他們的解題過程。通常能擠進這一關的女生僅有一、兩位而已。奇蹟就發生在一位穿著綠衣黑裙的小綠綠同學身上。在巡視的過程中，忽然在小綠綠的考卷上看到「想要解決這道幾何問題，需先證明一個引理：

**題目：**設  $p, q, r$  是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

利用這個引理就可以馬上解決這道問題。接下來敘述並證明這個引理」這樣的字眼。在做比較困難的數學問題時，“先證明一個有用的引理，再利用它證明問題本身”是常被使用的手法，對我來說，這不是意外之所在。讓我好奇的是「她對那個引理的證明」，簡直妙不可言。現在就讓我們來欣賞，小綠綠提出來的引理及對這引理的美妙證明。

事實上，小綠綠所提的引理就是本章的題目。至於它的證明，小綠綠是這樣分析的：

### 小綠綠對引理的瞥見

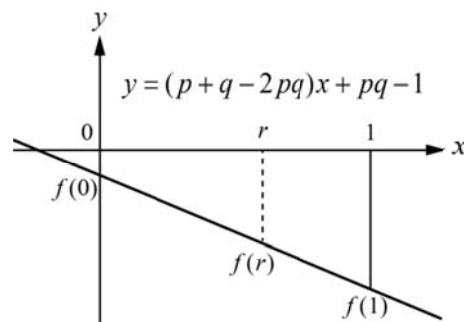
證明式子  $pq + qr + rp - 2pqr - 1$  小於 0 即可。現在把該式的  $p, q$  視為固定的實數，把  $r$  當成變數，將式子整理成  $(p + q - 2pq)r + pq - 1$ ，並令直線方程式為

$$y = f(x) = (p + q - 2pq)x + pq - 1.$$

將  $x = 0, 1$  分別代入，得

$$\begin{aligned} f(0) &= pq - 1 < 0; \\ f(1) &= p + q - pq - 1 \\ &= -(p-1)(q-1) < 0. \end{aligned}$$

此直線的略圖為



因為直線在  $[0, 1]$  區間的值恆為負數，所以

$$f(r) = (p + q - 2pq)r + pq - 1 < 0,$$

即

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1,$$

得證。

為了讓敘述簡潔，溝通方便，或者為了引進一個較深入，不熟悉的概念，給個「定義」成為數學上克服這兩道難關的不二法門，例如「輾轉相除法」，「質數」就是為了這兩個目的才出現的名詞。但是，有時候太過熟悉的名詞，反而忘了它的定義或從來沒給過定義，例如：叫你對「人」或「時間」給個定義，你可能會不知所措，不知如何是好，或

者回想不起來何時學過他們的定義。這完全是因為頭腦只對困難的東西感興趣，對平凡容易或理所當然的事物漠不關心所導致的結果。我想了好久，勉強想出三個「人」的定義，願意在這裡跟讀者分享：

- ① 從負面來思考，將「人」定義為「一種增胖容易，減肥難的動物」。不知道你對這樣的定義滿意嗎？
- ② 從自以為是的面向來思考，將「人」定義為「一種會作夢的動物」。你想過其它動物會作夢嗎？動物作夢的模樣又是怎樣的呢？
- ③ 從正面來思考，將「人」定義為「一種具有幽默感的動物」。你看過其它動植物具有幽默感過嗎？如果沒有，那幽默感肯定是人的一種天性，一種特色。人們輕易的擁有它，就應該時常使用它，不是嗎？

不知道讀者對上述三種定義滿意嗎？最好是自己也給一個不同的定義，領悟一下「平凡才是不平凡！」這句話的意思。這裡所要傳遞的訊息無非是：當你對平凡的事物無動於衷，無法給定義時，相信你對困難的事物也必定束手無策，不知如何是好才是。所以培養頭腦對平凡與不平凡的概念或事物都有興趣，才是正確之道。

小綠綠對這道不等式的驚人定義

$$y = f(x) = (p + q - 2pq)x + (pq - 1),$$

引領我們進入這道不等式的殿堂。對於這樣具有睿智的小綠綠，相信她對平凡無奇的「人」這個字的定義，肯定比我的定義還不凡。真想聆聽她對「人」的定義。